广东省大学生数学竞赛试卷参考答案(经济管理类)

一、(本题 30 分, 每小题 3 分) 填空题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$_____ .

解 由已知极限存在可知: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$，于是

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{\sin 2x}}{x\ln 5}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2\ln 5},\ \text{故}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=6\ln 5.$$

2．设 $f(x)$ 对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 满足方程 $(x-1)f''(x)+2(x-1)[f'(x)]^3=1-\mathrm{e}^{1-x}$.

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极值，则它是_____. (填极大值还是极小值)

解：答案为极小值.

$f(x)$ 在 $x=1$ 取得极值，因此应有 $f'(1)=0$，由于 $f''(x)$ 存在，因此 $f'(x)$ 是连续的，易求出

$f''(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\mathrm{e}^{1-x}-2(x-1)[f'(x)]^3}{x-1}=1>0$，因此为极小值.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x=$_____.

解　　令 $u=nx^2$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx}{1+n^2x^4}dx=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\dfrac{du}{1+u^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{4}$.

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=8, f(0)=3$，则 $f(\pi)=$_____.

解　$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx+f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\cos x dx\\&=\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx\\&=f(\pi)+f(0)=8\end{aligned}$$

从而 $f(\pi)=5$.

5．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=$_____.

解：答案为 $\dfrac{1}{6}$.

令 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$，原式=$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\rho-\sin\rho}{\rho^3}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{1-\cos\rho}{3\rho^2}=\dfrac{1}{6}$.

6. 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

解 $$F_1'\cdot(c\,\mathrm{d}x-a\,\mathrm{d}z)+F_2'\cdot(c\,\mathrm{d}y-b\,\mathrm{d}z)=0,$$

$$\mathrm{d}z=\frac{cF_1'}{aF_1'+bF_2'}\mathrm{d}x+\frac{cF_2'}{aF_1'+bF_2'}\mathrm{d}y,$$

故 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

7.设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2, f_x'(1,2)=3, f_y'(1,2)=4$，若 $g(x)=f\left(x,f\left(x,2x\right)\right)$，则 $g'(1)=$_____.

应填：47

解 $\mathrm{d}\,g(x)=f_x'\left(x,f\left(x,2x\right)\right)\mathrm{d}\,x+f_y'\left(x,f\left(x,2x\right)\right)\mathrm{d}\,f\left(x,2x\right)$

$=f_x'\left(x,f\left(x,2x\right)\right)dx+f_y'\left(x,f\left(x,2x\right)\right)\left[f_x'\left(x,2x\right)dx+2f_y'\left(x,2x\right)dx\right]$

$dg(x)\big|_{x=1}=f_x'\left(1,f\left(1,2\right)\right)dx+f_y'\left(1,f\left(1,2\right)\right)\left[f_x'\left(1,2\right)dx+2f_y'\left(1,2\right)dx\right]=47dx$

8.设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)=2$，记 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \ (t\ge0)$，则 $F''(0)=$_____.

解 由极坐标可得

$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$，因 $f(x)$ 连续，故

$F'(t)=2\pi tf(t^2)$，且$F'(0)=0$，

$$F''(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}2\pi f(t^2)=2\pi f(0)=4\pi.$$

9. 设$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三个不同的解，且$\dfrac{y_1(x)-y_2(x)}{y_2(x)-y_3(x)}$不恒等于常数，则微分方程的通解为_____.

解 由微分方程解的性质可得 $y=C_1\left[y_1(x)-y_2(x)\right]+C_2\left[y_2(x)-y_3(x)\right]+y_1(x)$.

10．级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^{2n}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)^{4n+1}$的收敛区间为_____.

解　答案为$-\ln3<x<\ln3$.

设$u=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，先求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^{2n}u^{4n+1}$收敛半径. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{2(n+1)}u^{4n+5}}{4^{2n}u^{4n+1}}=(2u)^4$，故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n4^{2n}u^{4n+1}$的收敛半径为$R=\dfrac{1}{2}$，于是原级数的收敛范围由不等式$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{e^x-1}{e^x+1}<\dfrac{1}{2}$所确定，解之得$\dfrac{1}{3}<e^x<3$.当$x=\ln3$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2}$；当$x=-\ln3$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2}$，它们的一般项均不以零为极限，故此级数发散，故$-\ln3<x<\ln3$.

二、(本题 10 分) 设函数$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=0$，证明：函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$$

具有一阶连续导数.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$，故$g(x)$在$x=0$点连续

(2) $g(x)$在$x=0$点的可导性

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

（3） $g'(x)$ 的连续性

由（2）可得

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$，从而 $\lim_{x\to 0}g'(x)=g'(0)$，故而 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 连续，从而处处连续.

三、（本题 10 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 当 $0\le x\le 1$ 时, $0\le f(x)\le 2$; 且对区间 $(0,1)$ 内所有 x 有 $f'(x)\neq 2$, 证明: 在 $[0,1]$ 上有且仅有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=2\xi$.

证明 令 $F(x)=f(x)-2x$, 则 $F(1)=f(1)-2\le 0$, $F(0)=f(0)\ge 0$. 由连续函数的介值定理可知: 至少存在一点 $\xi\in[0,1]$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=2\xi$.

倘若还有一点 $\eta\in[0,1]$, $\eta\neq\xi$, 使得 $F(\eta)=0$, 由罗尔定理可知: 在 ξ 与 η 之间存在一点 ζ, 使得 $F'(\zeta)=0$, 即 $f'(\zeta)=2$, 这与已知矛盾. 故原命题成立.

四、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=A$，求 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

解：交换积分次序，可得

$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$，

$2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy$$

$$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2.$$

因此$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}A^2$.

五、(本题 10 分)设$f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$,其中$f(x)$为连续函数,求$f(x)$.

解 原方程变形为 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x t\,f(t)dt$，代入$x=0$得$f(0)=0$.

两边关于x求导得 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+xf(x)$，即

$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$，代入$x=0$得$f'(0)=1$.

两边再求导数得：$f''(x)+f(x)=-\sin x$，

于是得到微分方程：$y''+y=-\sin x, y(0)=0, y'(0)=1$.

其特征方程为$r^2+1=0$，求出对应齐次方程的通解为$Y=C_1\sin x+C_2\cos x$

设特解为$y^*=x(A\sin x+B\cos x)$带入原方程求出：$A=0, B=\frac{1}{2}$.

所以非齐次方程的通解为$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x$，代入初始条件：得

$C_1=\frac{1}{2}, C_2=0$，因此$y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、（本题 10 分）设$f(x)$在区间$[-1,1]$上连续且为奇函数，区域D由曲线

$y=4-x^2$与$y=-3x$、$x=1$所围成，求$I=\iint_D\left(1+f(x)\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 令

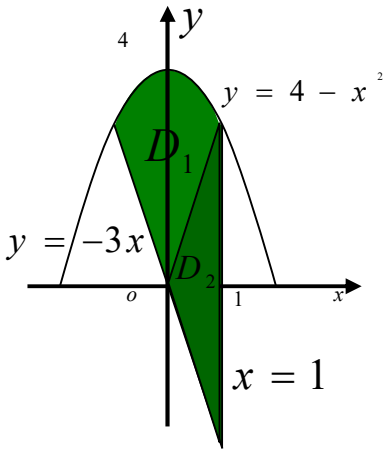
$$F(x,y)=f(x)\ln(y+\sqrt{1+y^2})\text{，}$$

如图所示，因为$D=D_1+D_2$．显然，在D_1上$F(-x,y)=-F(x,y)$；在D_2上

$F(x,-y)=-F(x,y)$．所以

$$I=\iint_{D_1}\left(1+f(x)\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left(1+f(x)\ln(y+\sqrt{1+y^2})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{3x}^{4-x^2}\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{3x}\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{4-x^2}\mathrm{d}y=\frac{22}{3}.$$



七、(本题 10 分)　设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续导数，n 为正整数，证明:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty).$$

证明　$\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x^n = \frac{1}{n}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \big(f(x)+xf'(x)\big)x^n\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{n}f(1) - \frac{1}{n}\int_0^1 \big(f(x)+xf'(x)\big)x^n\,\mathrm{d}x$$

由于 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以存在 $M>0$，对所有 $x\in[0,1]$，有 $\big|f(x)+xf'(x)\big|\le M$，从而

$$\left|\int_0^1 \big(f(x)+xf'(x)\big)x^n\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 \big|f(x)+xf'(x)\big|x^n\,\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

故 $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\to\infty)$.

八、(本题 10 分)　设 $a>0$，判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\mathrm{L}\ (1+a^n)}$ 的敛散性.

解　(1) 设级数一般项 b_n，考察

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\mathrm{L}\ (1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\mathrm{L}\ (1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0, a<1\\ \dfrac{1}{2}, a=1\\ 1, a>1\end{cases}$$

由达朗贝尔判别法知道，当$a\le 1$时级数收敛。

（2）设$a>1$

$b_n=\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\mathrm{L}\ (1+a^n)}=\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_1^{\,2})\mathrm{L}\ (1+a_1^{\,n})}$，$0<a_1=\dfrac{1}{a}<1$

令$c_n=(1+a_1)(1+a_1^{\,2})\mathrm{L}\ (1+a_1^{\,n})$，显然$\{c_n\}$单增，下证其有界。

由$x>0,\mathrm{e}^x>1+x$可知

$c_n=(1+a_1)(1+a_1^{\,2})\mathrm{L}\ (1+a_1^{\,n})<\mathrm{e}^{a_1}\,\mathrm{e}^{a_1^{\,2}}\mathrm{L}\ \mathrm{e}^{a_1^{\,n}}=\mathrm{e}^{\frac{a_1-a_1^{\,n+1}}{1-a_1}}<\mathrm{e}^{\frac{a_1}{1-a_1}}$，

从而$\{c_n\}$单调有界则其收敛，且其极限介于 1 与$e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$之间，从而$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，其值大于 0，从而原级数发散。

综上所述：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\mathrm{L}\ (1+a^n)}$当$0<a\le 1$时收敛，当$a>1$时发散.