姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线　答题时不要超过此线

第十六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类高年级组, 2025 年 4 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	10	14	20	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设 2025 阶实对称矩阵 A 的秩为 1012, 且 $A^2 = A$. 则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范型为:
$y_1^2 + \cdots + y_{1012}^2$.

2. 二元函数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$ 的极小值点为: $(-1, 2)$.

3. 二重积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$ 转换为极坐标形式为:
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

4. 微分方程 $y' = 1 + xe^y$ 的通解为:
$y(x) = x - \ln\left(C + e^x - xe^x\right)\Big(= -\ln\left(Ce^{-x} + 1 - x\right)\Big)$, 其中 $C > -1$ 为常数.

二、(本题 10 分) 1. 一个半径为 r、球心为 $(0,0,h)$ (其中 $h>r$) 的圆球相切于一个以原点为顶点、以 z 轴为轴的圆锥形漏斗, 求圆锥形漏斗的方程;

2. 求以原点为顶点, 包含三条坐标轴的圆锥面方程.

解答. 1. 设所求圆锥形漏斗的锥顶为原点 $O(0,0,0)$, 圆球的半径为 r, 球心的坐标是 $O'(0,0,h)$, 其中 $h>r$. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是圆锥面母线上任意一点, 则过 M_1 点的母线参数方程为

$$x=x_1t,\ y=y_1t,\ z=z_1t,$$

其中 t 为参数. 设球面的方程为

$$x^2+y^2+(z-h)^2=r^2.$$

..... (2 分)

将直母线的参数方程代入球面方程可得

$$x_1^2t^2+y_1^2t^2+(z_1t-h)^2=r^2,$$

化简得

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)t^2-2hz_1t+h^2-r^2=0,$$

因为直母线与球面相切, 则

$$4z_1^2h^2-4(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(h^2-r^2)=0,$$

即

$$z_1=\sqrt{\frac{h^2-r^2}{r^2}}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)},$$

于是, 所求圆锥面方程为

$$z=\sqrt{\frac{h^2-r^2}{r^2}}\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

..... (4 分)

2. 因为顶点在原点的圆锥面上任意一条直母线与圆锥面轴的夹角都相同，首先求包含三条正半轴 $+x,+y,+z$ 的圆锥面方程. 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

任意一点, 则过 M 点的直母线的方向向量为 $\mathbf{s}=(x,y,z)$, 轴的方向向量为 $\mathbf{n}=(1,1,1)$, z 的正半轴方向向量 $\mathbf{v}=(0,0,1)$, 则有

$$\frac{|\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{s}||\mathbf{n}|}=\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|},$$

于是可得

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

化简可得

$$xy+xz+yz=0.$$

..... (7 分)

类似地, 可以获得其它情形的圆锥面方程. 总结如下：

(i) 包含坐标轴 $+x,+y,+z$, 圆锥面方程为 $xy+xz+yz=0$;

(ii) 包含坐标轴 $+x,+y,-z$, 圆锥面方程为 $xy-xz-yz=0$;

(iii) 包含坐标轴 $+x,-y,+z$, 圆锥面方程为 $-xy+xz-yz=0$;

(iv) 包含坐标轴 $-x,+y,+z$, 圆锥面方程为 $-xy-xz+yz=0$;

(v) 包含坐标轴 $+x,-y,-z$, 圆锥面方程为 $-xy-xz+yz=0$;

(vi) 包含坐标轴 $-x,+y,-z$, 圆锥面方程为 $-xy+xz-yz=0$;

(vii) 包含坐标轴 $-x,-y,+z$, 圆锥面方程为 $xy-xz-yz=0$;

(viii) 包含坐标轴 $-x,-y,-z$, 圆锥面方程为 $xy+xz+yz=0$.

..... (10 分)

三、(本题 14 分) 设实系数多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别为: $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $q(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$. 已知 $q(x)|p(x)$, 且对某个 k 有 $|b_k|>2025^kC_m^k$, 其中 C_m^k 为组合数. 证明: 存在 j 使得 $|a_j|>2024$.

证明. 设 $x_1,\ldots,x_m$ 为 $q(x)$ 的所有复根. 若它们的模均不大于 2025, 则由韦达定理知

$$|b_1|=|-(x_1+\cdots+x_m)|\leqslant 2025m,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|b_k|=|(-1)^k\sum_{i_1<\cdots<i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}|\leqslant 2025^kC_m^k,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|b_m|=|(-1)^mx_1\cdots x_m|\leqslant 2025^m.$$

这与题目所给的条件相矛盾. 结果, $q(x)$ 至少有一个根 y 满足

$$|y|>2025.$$

注意到 $q(x)|p(x)$, 故又有 $p(y)=0$.

..... (10 分)

现假定对所有的 j, $|a_j|\leqslant 2024$. 于是有

$$\begin{aligned}0=&|p(y)|=|y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n|\\ \geqslant&|y^n|-|a_1y^{n-1}|-\cdots-|a_n|\\ \geqslant&|y^n|-2024(|y|^{n-1}+\cdots+|y|+1)\\ =&|y^n|-2024\cdot\frac{|y|^n-1}{|y|-1}\\ =&|y^n|(1-\frac{2024}{|y|-1})+\frac{2024}{|y|-1}>0.\end{aligned}$$

矛盾.

至此, 我们得到必有某个 j, 使得 $|a_j|>2024$. 证毕.

..... (14 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

四、 (本题 20 分) 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续, $x_0\in[a,b]$, $x_{n+1}=f(x_n)\,(n\geqslant 0)$.

1. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.
2. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+2025}-x_n\right)=0$, 证明 $\left\{x_n\middle|\, n\geqslant 1\right\}$ 的聚点不超过 2025 个.

证明. 1. 若 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 设极限为 ξ, 则由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$ 可得 $\{x_{n_k+1}\}$ 亦收敛于 ξ. 进而由 f 的连续性得到

$$f(\xi)=\lim_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to+\infty}x_{n_k+1}=\xi.$$

即 ξ 是 f 的不动点.

..... (3 分)

若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{x_n\}$ 中没有 f 的不动点. 又由于 $\{x_n\}$ 有界, 因此它有两个子列收敛于不同的值 α,β. 设 $\beta>\alpha$.

令 $s\in(\alpha,\beta)$. 任取 $\varepsilon>0$, 有 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时, $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. 由于 β 是 $\{x_n\}$ 子列的极限, 有 $m>N$ 使得 $x_m>s$. 同样, 有 $j>m$ 使得 $x_j<s$. 令 k 为满足 $x_k<s$ 和 $k>m$ 的最小的整数. 则 $0\leqslant x_{k-1}-s\leqslant x_k+\varepsilon-s<\varepsilon$. 因此, s 也是 $\{x_n\}$ 子列的极限, 进而是 f 的不动点.

..... (8 分)

特别地, $[\alpha,\beta]$ 中的点都是 $\{x_n\}$ 的子列的极限以及 f 的不动点. 这样当某个 x_n 属于 $[\alpha,\beta]$ 时, 就有 $x_{n+1}=x_n$, 这显然是不可能的.

总之, $\{x_n\}$ 发散的假设不成立. 因此, $\{x_n\}$ 收敛.

..... (10 分)

2. 对于 $k\geqslant 1$ 以及函数 g. 用 g_k 表示 $\overbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}^{\text{k 个}}$. 令 $F:=f_{2025}$, 则对于 $j\geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(F_{n+1}(x_j)-F_n(x_j)\right)=0$. 由 (1) 的结论可得, 对于固定的 j, $\{F_n(x_j)\}$ 收敛. 特别, 对于 $0\leqslant j\leqslant 2024$, $\{x_{2025n+j}\}$ 收敛. 这意味着 $\{x_n\}$ 的子列极限不超过 2025 个. 从而 $\{x_n\}$ 的聚点不超过 2025 个.

..... (20 分)

五、(本题 12 分) 记 $S_r=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|x^2+y^2=r^2\big\}$ $(r\geqslant 0)$, $C(\mathbb{R}^2)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上连续函数全体. 对于 $f\in C(\mathbb{R}^2)$, 记 $E_f=\big\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^2\big|\boldsymbol{\xi}$ 为 f 在某个 S_r 上的最小值点, $r\geqslant 0\big\}$.

1. 设 $g\in C(\mathbb{R}^2)$, 证明：E_g 是闭集.
2. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$ 为闭集, 且 $E\cap S_r\neq\varnothing\,(\forall\, r\geqslant 0)$. 证明: 存在 $g\in C(\mathbb{R}^2)$, 使得 $E_g=E$.
3. 证明: 存在 $g\in C(\mathbb{R}^2)$, 使得 E_g 为不连通集.
4. 是否存在 $g\in C(\mathbb{R}^2)$, 使得 E_g 的任何连通子集均为单点集？

证明. 1. 由连续性, g 在紧集 S_r 上有最小值, 因此根据集合 E_g 的定义，知 E_g 与每个 S_r 的交集非空.

为证明 E_g 是闭集，设 E_g 中点列 $\{p_n\}$ 收敛于 p. 我们要证 $p\in E_g$. 为此, 记 $r=|p|$. 不妨设 $r>0$. 则对于任何 $q\in S_r$, 由 $p_n\in E_g$ 得到 $f\big(\frac{|p_n|}{r}q\big)\geqslant g(p_n)$. 由连续性, 即得 $g(q)=\lim\limits_{n\to+\infty}f\big(\dfrac{|p_n|}{r}q\big)\geqslant\lim\limits_{n\to+\infty}g(p_n)=g(p)$. 因此 $p\in E_g$, 从而 E_g 是闭集.

..... (3 分)

2. 对于 $p\in\mathbb{R}^2$, 定义 $g(p)$ 为点 p 到集合 E 的距离. 则 g 是非负连续函数, 且当且仅当 $p\in E$ 时, $g(p)=0$. 由于 E 与每个 S_r 相交, 因此, g 在 S_r 上的最小值为 0，且恰在 S_r 与 E 的交点处取得. 由此证得 $E_g=E$.

..... (6 分)

3. 取 $E=\big([0,+\infty)\times\{0\}\,\big)\cup\big(\,\{0\}\times[1,+\infty)\big)$. 易见 E 是闭集且与每个 S_r 的交集非空 $(\forall\, r\geqslant 0)$. 因此, 由第 2 小题的结论, 存在 $g\in C(\mathbb{R}^2)$, 使得 $E_g=E$. 易见, $E_g=E$ 不连通.

..... (9 分)

4. 考虑如下 Cantor 集

$$F=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^k}\Big|a_n\in\{0,1\},n\geqslant 1\right\}.$$

则 F 为 $[0,\frac{1}{2}]$ 的疏朗闭子集. 定义

$$R(\theta)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}\right),\qquad\forall\,\theta\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\in F,$$

其中 $R\big(\frac{1}{2}\big)$ 理解为 $+\infty$. 易见 R 是 $F\setminus\big\{\frac{1}{2}\big\}$ 上的连续函数.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

令 $E = G\Big(F \setminus \{\frac{1}{2}\}\Big)$, 其中

$$G(\theta) = \big(R(\theta)\cos\theta, R(\theta)\sin\theta\big), \qquad \theta \in F\backslash\{\frac{1}{2}\}.$$

则集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ 具有如下性质:

(i) E 是闭集. 这由 R, G 的连续性以及 $R\big(\frac{1}{2}\big) = \lim\limits_{\substack{\theta\to\frac{1}{2}\\ \theta\in F}} R(\theta) = +\infty$ 可得.

(ii) 对任何 $r \geqslant 0$, E 与每个 S_r 的交非空.

(iii) E 完全不连通. 这是因为 G 是 $F \setminus \{\frac{1}{2}\}$ 到 E 的一一映射. 对于 E 的任何紧子集 W, 易见 $G^{-1}(W)$ 包含于 $F \setminus \{\frac{1}{2}\}$ 的一个紧子集 F_W. 于是又有 $G\big(\overline{G^{-1}(W)}\big) \subseteq W$. 因此, $G^{-1}(W)$ 也是紧集.

这样, 由紧集上可逆连续映射的逆映射也是连续映射, 得到 G^{-1} 限制在 E 的任何紧子集上是连续映射. 由此易得 G^{-1} 是 E 上的连续映射.

若 E 中有两个不同的点属于同一个连通分支 U, 则 $G^{-1}(U)$ 也是连通集. 这与 $G^{-1}(U) \subseteq F$ 而 F 是完全不连通集(即任何不同的两点不属于同一个连通分支的集合)矛盾.

..... (12 分)

注: 若 F 中不同的两点属于同一连通分支 V, 则由于一维的连通集必为空集, 单点集或区间, 所以 V 是区间. 这与 E 是疏朗集不包含区间矛盾.

六、(本题 12 分) 1. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, 且 $|f(z)|<1$. 证明：

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leqslant 1-|f(z)|^2.$$

2. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析, $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内单叶解析, 且 $f(0)=F(0)$, 且满足 $f(|z|<1)\subseteq F(|z|<1)$. 证明：存在 $|z|<1$ 内的解析函数 $w(z)$, 使得 $f(z)=F(w(z))$, 且 $|w(z)|\leqslant|z|$；

3. 在第 2 小题的条件下, 证明: $|f'(0)|\leqslant|F'(0)|$, 且等号成立当且仅当 $w(z)=e^{i\theta}z$（其中 θ 为实数）.

证明. 1. 令 $w=f(z)$, 对于任意 $z_0\in\{z\mid|z|<1\}$, 记 $w_0=f(z_0)$, 则 $|w_0|<1$.

通过线性变换

$$\zeta=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z},\quad \omega=\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w},$$

分别将单位圆 $|z|<1$ 和 $|w|<1$ 保形变换为 $|\zeta|<1$ 和 $|\omega|<1$.

设 $\omega=\varphi(\zeta)$, 则 $\varphi(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 内解析, 且 $|\varphi(\zeta)|<1$, $\varphi(0)=0$. 根据 Schwarz 引理,

$$|\varphi(\zeta)|\leqslant|\zeta|,\quad(|\zeta|<1),$$

即

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|.$$

令 $z\to z_0$, 可得

$$|f'(z_0)|\leqslant\frac{1-|f(z_0)|^2}{1-|z_0|^2}.$$

由于 z_0 的任意性, 结论 1 得证.

..... (4 分)

2. 由于 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 内单叶解析, 其逆函数 $F^{-1}(\zeta)$ 在区域 $G=F(|z|<1)$ 内单叶解析, 并将 G 保形映射为 $|z|<1$.

定义函数 $w(z)=F^{-1}(f(z))$. 由于 $f(|z|<1)\subseteq F(|z|<1)$, 对于任意 z（$|z|<1$）, 有 $f(z)\in G$. 因此, 函数 $w(z)=F^{-1}(f(z))$ 在 $|z|<1$ 内解析, 且满足 $f(z)=F(w(z))$.

由于

$$|w(z)|=|F^{-1}(f(z))|\leqslant 1,\quad w(0)=F^{-1}(f(0))=F^{-1}(F(0))=0,$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

根据 Schwarz 引理, 对于任意 z（$|z|<1$）, 有 $|w(z)| \leqslant |z|$, 即结论 1 成立.

..... (8 分)

3. 由 $f(z)=F(w(z))$, 可得

$$f'(z)=F'(w(z))w'(z).$$

对于任意 z（$|z|<1$）, 根据 1 的结论,

$$(1-|z|^2)|f'(z)|=(1-|z|^2)|F'(w(z))||w'(z)| \leqslant (1-|w(z)|^2)|F'(w(z))|.$$

令 $z \to 0$, 可得

$$|f'(0)| \leqslant |F'(0)|.$$

若 $|f'(0)|=|F'(0)|$, 由 $|f'(z)|=|F'(w(z))||w'(z)|$, 可知

$$|f'(0)|=|F'(0)||w'(0)|,$$

因此 $|w'(0)|=1$, 此时 $w(z)=e^{i\theta}z$（θ 为实数）.

反之, 若 $w(z)=e^{i\theta}z$（θ 为实数）, 则

$$f'(z)=F'(w(z))e^{i\theta},$$

于是 $|f'(z)|=|F'(w(z))|$, 特别地, $|f'(0)|=|F'(0)|$. 结论 3 得证.

..... (12 分)

七、(本题 12 分) 设 p 是素数, $n \geqslant 1$ 是正整数, $q = p^n$. 证明:

1. 存在恰有 q 个元素的域 $\mathbb{F}_q$;
2. 如果 K 是一个 q 元域, 则 $K \cong \mathbb{F}_q$;
3. 设 $L \supset \mathbb{F}_q$ 是有限域扩张, 则映射 $\eta_q : L \to L,\ x \mapsto x^q$ 是域自同构, 且满足

$$\eta_q(a) = a, \quad \forall\ a \in \mathbb{F}_q;$$

4. 域扩张 $L \supset \mathbb{F}_q$ 的 Galois 群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q)$ 是由 η_q 生成的循环群;
5. $L^* = L \setminus \{0\}$ 关于 L 中乘法成为一个循环群. 特别地, 存在 $\alpha \in L$ 使 $L = \mathbb{F}_q[\alpha]$.

证明. 1. 设 $\mathbb{F}_q$ 是多项式 $f(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ 的分裂域. 因为 $f'(x) = -1$, 故 $f(x) = x^q - x$ 在分裂域 $\mathbb{F}_q$ 中恰有 q 个根 $R_f = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_q\} \subset \mathbb{F}_q$. 直接验证 R_f 是子域, 从而 $R_f = \mathbb{F}_q$.

..... (2 分)

2. 若 $\mathrm{Char}(K) = p_1$, $[K : \mathbb{F}_{p_1}] = m$, 则 $|K| = p_1^m = q$, 从而 $p_1 = p$, $m = n$, K 与 $\mathbb{F}_q$ 一样也是 $\mathbb{F}_p$ 的 n 次扩张. 由于K^* 关于 K 的乘法是一个 $q-1$ 阶群, 故 $\forall\, u \in K^*$, 有 $u^{q-1} = 1$. 即域 K 也刚好由 $f(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ 在 K 中的 q 个根组成. 因此 K 与 $\mathbb{F}_q$ 是同一个多项式的分裂域, 从而 $K \cong \mathbb{F}_q$.

..... (4 分)

3. 由结论 (1)的证明知, $\mathbb{F}_q$ 中元素皆满足 $x^q = x$, 即 $\eta_q(a) = a$ ($\forall\ a \in \mathbb{F}_q$). 因为 $q\alpha = 0$ ($\forall\, \alpha \in L$), 所以 $(\alpha + \beta)^q = \alpha^q + \beta^q$ ($\forall\ \alpha, \beta \in L$). 由此易证 η_q 是域同构.

..... (6 分)

4. 设 $L \supset \mathbb{F}_q$ 是 m 次扩张, 则 L 是 q^m 元域. 由结论 (2)的证明可知, L 是可分多项式 $f(x) = x^{q^m} - x \in \mathbb{F}_q[x]$ 分裂域, 所以 $|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q)| = [L : \mathbb{F}_q] = m$. 另一方面, 对任意 $0 < k < m$, $L \xrightarrow{\eta_q^k} L$ 不是恒等映射 (否则多项式 $x^{q^k} - x$ 在L 中有 q^m个根, 与 $q^k < q^m$ 矛盾), 故 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{F}_q)$ 是由 η_q 生成的循环群.

..... (8 分)

5. 设 $\alpha \in L^*$ 是有限交换群 L^* 中的最大阶元, 其阶为 N. 我们断言:

$$\beta^N = 1, \quad \forall\, \beta \in L^*.$$

事实上, 设 β 的阶是 N', 若 $\beta^N \neq 1$, 则 $N' \nmid N$. 设 $d = (N, N')$ 是 N, N' 的最

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

大公因数,

$$d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$$

是不可约分解, $d_1 = \prod_{p_i \nmid \frac{N'}{d}} p_i^{k_i}$, $d_2 = \frac{d}{d_1}$. 则 $(\frac{N'}{d_1}, \frac{N}{d_2}) = 1$, β^{d_1} 的阶是 $\frac{N'}{d_1}$, α^{d_2} 的阶是 $\frac{N}{d_2}$. 易证 $\alpha^{d_2}\beta^{d_1}$ 的阶是 $\frac{N}{d_2} \cdot \frac{N'}{d_1} = N \cdot \frac{N'}{d} > N$, 此与 N 选取矛盾. 由此断言, L^* 中元素皆是方程 $x^N - 1 = 0$ 根, 故 $|L^*| = q^m - 1 \leq N$, 从而 L^* 是由 $\alpha \in L^*$ 生成的循环群.

..... (12 分)

八、(本题 12 分) 设 C 是曲面 S 上曲率不等于零的渐近曲线, 其挠率为 τ. 设曲面 S 的高斯曲率为 K. 证明: $|\tau| = \sqrt{-K}$.

解答. 设曲面 S 的方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$, 过 S 上任意一点 P 的曲线 C 的参数方程为 $u^i = u^i(s),\ i = 1, 2$, 其中 s 为弧长参数. 曲线 C 的切向量为 $\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$. 设 $\mathbf{N}$ 表示曲线 C 在点 P 的单位主法向量, k 表示 C 在 P 点的曲率. 由法曲率定义, 沿曲线 C 切向 $\mathbf{T}$ 的法曲率定义为

$$k_n(\mathbf{T}) = (k\mathbf{N}) \cdot \mathbf{n},$$

又法曲率 k_n 可表示为

$$k_n = \Omega_{ij} \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} = \frac{\Omega_{ij}\, \mathrm{d}u^i\, \mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

..... (3 分)

由于曲线 C 是曲率非零的渐近线, 则有

$$k\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = k \cos\phi = k_n = \mathrm{II} = 0,$$

从而可得 $\cos\phi = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\mathbf{N} \perp \mathbf{n}$.

因为 $\mathbf{T} \perp \mathbf{n}$, 进而有 $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \parallel \mathbf{n}$, 其中 $\{\mathbf{r}(s); \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ 是曲线在弧长参数 s 时的 Frenet 标架. 于是 $\mathbf{B} = \varepsilon\mathbf{n},\ \varepsilon = \pm 1$.

注意到 $\mathrm{d}\mathbf{B} = -\tau\mathbf{N}\,\mathrm{d}s$ 得到 $\mathrm{d}\mathbf{n} = \varepsilon\,\mathrm{d}\mathbf{B} = -\varepsilon\tau\mathbf{N}\,\mathrm{d}s$.

..... (9 分)

注意到曲面 S 的第三基本形式 $\mathrm{III} = \mathrm{d}\mathbf{n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$, 以及 $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ 满足

$$\mathrm{III} - 2H\mathrm{II} + K\mathrm{I} = 0, \mathrm{II} = 0,$$

其中 H 是曲面的平均曲率. 于是得到

$$K = -\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}} = -\frac{|\,\mathrm{d}\mathbf{n}|^2}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{|\,\mathrm{d}\mathbf{B}|^2}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\tau^2\,\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}s^2} = -\tau^2.$$

由此得到

$$|\tau| = \sqrt{-K}.$$

..... (12 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

九、(本题 12 分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，且 X_i 服从参数为 1 的指数分布. 定义 $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$Z_i = X_i - Y$ 以及 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. 分别求 Y、S_n 的概率分布密度以及事件 $\{Y = X_1\}$ 的概率.
2. 证明在 $Y = X_1$ 的条件下 $Z_2, \cdots, Z_n$ 独立且服从参数为 1 的指数分布. 即对任意的 $x_i > 0$,
$$\mathbb{P}\big(Z_2 \leqslant x_2, \cdots, Z_n \leqslant x_n | Y = X_1\big) = \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i).$$
3. 令 $T := S_n - nY$. 证明 T 和 S_{n-1} 同分布且 T 与 Y 独立.
4. 求 $\dfrac{Y}{S_n}$ 的概率分布密度.

解答. 1. 利用独立性，对任意的 $y > 0$，我们有
$$\mathbb{P}(Y \geqslant y) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geqslant y) = \left(\int_y^{\infty} e^{-t} dt\right)^n = e^{-ny}.$$
..... (2 分)

此外由卷积性质我们知道 S_n 服从参数为 n 的 Gamma 分布，且其密度为
$$t^{n-1} e^{-t}/(n-1)!.$$
..... (3 分)

注意
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = \cdots = \mathbb{P}(Y = X_n)$$
且
$$\mathbb{P}(Y = X_1) + \cdots + \mathbb{P}(Y = X_n) = 1.$$
从而
$$\mathbb{P}(Y = X_1) = 1/n.$$
..... (5 分)

2. 对给定 $z_i > 0$，利用 $\mathbb{P}(Y = X_1) = 1/n$，我们有
$$\mathrm{I} := \mathbb{P}\Big(Z_2 \leqslant z_2, \cdots, Z_n \leqslant z_n | Y = X_1\Big) = n\mathbb{P}\big(Z_2 \leqslant z_2, \cdots, Z_n \leqslant z_n, Y = X_1\big).$$

注意 $\{Z_2 \leqslant z_2, \cdots, Z_n \leqslant z_n, Y = X_1\} = \{0 \leqslant X_2 - X_1 \leqslant z_2, \cdots, 0 \leqslant X_n - X_1 \leqslant z_n\}$, 利用独立性，更进一步，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= n\mathbb{P}\big(0 \leqslant X_2 - X_1 \leqslant z_2, \cdots, 0 \leqslant X_n - X_1 \leqslant z_n\big) \\
&= n\int_0^\infty e^{-t} \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(t \leqslant X_i \leqslant z_i + t)dt = n\int_0^\infty e^{-t} \prod_{i=2}^n \left(\int_t^{z_i+t} e^{-s}ds\right) dt \\
&= n\int_0^\infty e^{-t} \prod_{i=2}^n (e^{-t} - e^{-t-z_i})dt = \prod_{i=2}^n (1 - e^{-z_i}) = \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(X_i \leqslant x_i).
\end{aligned}$$

..... (8 分)

3. 注意在 $Y = X_1$ 的条件下 $T = \sum_{i=2}^n Z_i$，由第二问我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant t, Y \leqslant y) &= n\mathbb{P}(S_n - nX_1 \leqslant t, Y = X_1 \leqslant y) \\
&= n\mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^n Z_i \leqslant t, X_1 \leqslant y, Y = X_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^n Z_i \leqslant t, X_1 \leqslant y | Y = X_1\right) \\
&= \frac{t^{n-2}e^{-t}}{(n-2)!}\mathbb{P}\left(X_1 \leqslant y | Y = X_1\right) = \frac{t^{n-2}e^{-t}}{(n-2)!}\mathbb{P}\left(Y \leqslant y\right).
\end{aligned}$$

..... (10 分)

4. 由第三问知道 $Y/S_n = Y/(nY + T)$，因此对 $x \in [0, 1/n)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y/S_n \leqslant x) = \mathbb{P}(Y/(nY + T) \leqslant x) \\
=&\int_0^\infty \int_0^\infty 1_{y \leqslant x(ny+t)} \frac{ne^{-ny}t^{n-2}e^{-t}}{(n-2)!}dydt \\
=&\int_0^\infty \frac{t^{n-2}e^{-t}}{(n-2)!} \int_0^{xt/(1-nx)} ne^{-ny}dydt \\
=&\int_0^\infty \left(1 - e^{-nxt/(1-nx)}\right) \frac{t^{n-2}e^{-t}}{(n-2)!}dt \\
=&1 - (1 - nx)^{n-1}.
\end{aligned}$$

..... (12 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

十、(本题 12 分) 令 $L_0(x)=1, L_1(x)=x$. 对于 $n\geqslant 1$, 定义

$$L_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xL_n(x)-\frac{n}{n+1}L_{n-1}(x).$$

记 δ_{mn} 为 Kronerker 记号. 众所周知, Legendre 多项式 L_n 有以下性质:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}L_m(x)L_n(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}\,(\forall\, m,n\geqslant 0)$;

(ii) $L'_{n-1}(x)=xL'_n(x)-nL_n(x)$;

(iii) $L'_{n+1}(x)=xL'_n(x)+(n+1)L_n(x)$.

1. 证明: $(x^2-1)L'_n(x)=nxL_n(x)-nL_{n-1}(x)\,(n\geqslant 1)$.
2. 证明: $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)L'_i(x)L'_j(x)\,dx=\frac{2i(i+1)}{2i+1}\delta_{ij}\,(\forall\, i,j\geqslant 1)$.
3. 对于 $n\geqslant 1$, 记 s_j 是区间 $[-1,1]$ 上 n 个高斯积分点, w_j 是 s_j 对应的权重 $(1\leqslant j\leqslant n)$. 定义矩阵 $A=\Big(L'_i(s_j)\Big)_{n\times n}$,

$$W=\operatorname{diag}\Big((1-s_1^2)w_1,(1-s_2^2)w_2,\cdots,(1-s_n^2)w_n\Big).$$

证明: $B=A^TWA$ 是一个对角矩阵.

证明. 1. 在 (ii) 两边乘以 x, 可得

$$x^2L'_n(x)-nxL_n(x)=xL'_{n-1}(x).$$

由 (iii), 有

$$L'_n(x)=xL'_{n-1}(x)+nL_{n-1}(x).$$

上述两式相减即得

$$(x^2-1)L'_n(x)=nxL_n(x)-nL_{n-1}(x).$$

..... (3 分)

2. 由第 1 小题的结论,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big((x^2-1)L'_n(x)\big)&=n(L_n(x)+xL'_n(x))-nL'_{n-1}(x)\\&=nL_n(x)+n(xL'_n(x)-L'_{n-1}(x))\\&=nL_n(x)+n\cdot nL_n(x)\\&=n(n+1)L_n(x).\end{aligned}$$

. . . . . (5 分)

从而

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)L_i'(x)L_j'(x)dx &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)L_i'(x)dL_j(x)\\ &= -\int_{-1}^{1}L_j(x)\frac{d}{dx}\big((1-x^2)L_i'(x)\big)\\ &= \int_{-1}^{1}L_j(x)i(i+1)L_i(x)dx\\ &= i(i+1)\int_{-1}^{1}L_i(x)L_j(x)dx = \frac{2i(i+1)}{2i+1}\delta_{ij}.\end{aligned}$$

. . . . . (8 分)

3. 记 $B=(b_{ij})_{n\times n}$. 那么 B 中所有元素除了最后一个 b_{nn} 之外, 可以如下计算:

$$\begin{aligned}b_{ij} &= \sum_{r=1}^{n-1}w_r(1-s_r^2)L_i'(s_r)L_j'(s_r)\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)L_i'(x)L_j'(x)dx\\ &= \frac{2i(i+1)}{2i+1}\delta_{ij}.\end{aligned}$$

. . . . . (12 分)

上面前一个等式可由 Gauss 积分公式且 $i+j\le 2n-1$ 得到. 此即 B 中元素除了对角线之外元素全为零, 亦即 B 是对角矩阵.