姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2025 年 4 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	10	14	20	10	16	10	100
得分								

注意: 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设 2025 阶实对称矩阵 A 的秩为 1012, 且 $A^2 = A$. 则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范型为:
$y_1^2 + \cdots + y_{1012}^2$.

2. 二元函数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$ 的极小值点为: $(-1, 2)$.

3. 二重积分 $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$ 转换为极坐标形式为:
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$.

4. 微分方程 $y' = 1 + xe^y$ 的通解为:
$y(x) = x - \ln\left(C + e^x - xe^x\right)\Big(= -\ln\left(Ce^{-x} + 1 - x\right)\Big)$, 其中 $C > -1$ 为常数.

二、(本题 10 分) 1. 一个半径为 r、球心为 $(0,0,h)$ (其中 $h>r$) 的圆球相切于一个以原点为顶点、以 z 轴为轴的圆锥形漏斗, 求圆锥形漏斗的方程;

2. 求以原点为顶点, 包含三条坐标轴的圆锥面方程.

解答. 1. 设所求圆锥形漏斗的锥顶为原点 $O(0,0,0)$, 圆球的半径为 r, 球心的坐标是 $O'(0,0,h)$, 其中 $h>r$. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是圆锥面母线上任意一点, 则过 M_1 点的母线参数方程为

$$x=x_1t,\ y=y_1t,\ z=z_1t,$$

其中 t 为参数. 设球面的方程为

$$x^2+y^2+(z-h)^2=r^2.$$

..... (2 分)

将直母线的参数方程代入球面方程可得

$$x_1^2t^2+y_1^2t^2+(z_1t-h)^2=r^2,$$

化简得

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)t^2-2hz_1t+h^2-r^2=0,$$

因为直母线与球面相切, 则

$$4z_1^2h^2-4(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(h^2-r^2)=0,$$

即

$$z_1=\sqrt{\frac{h^2-r^2}{r^2}}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)},$$

于是, 所求圆锥面方程为

$$z=\sqrt{\frac{h^2-r^2}{r^2}}\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

..... (4 分)

2. 因为顶点在原点的圆锥面上任意一条直母线与圆锥面轴的夹角都相同，首先求包含三条正半轴 $+x,+y,+z$ 的圆锥面方程. 设 $M(x,y,z)$ 为圆锥面上

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

任意一点, 则过 M 点的直母线的方向向量为 $\mathbf{s}=(x,y,z)$, 轴的方向向量为 $\mathbf{n}=(1,1,1)$, z 的正半轴方向向量 $\mathbf{v}=(0,0,1)$, 则有

$$\frac{|\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{s}||\mathbf{n}|}=\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|},$$

于是可得

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

化简可得

$$xy+xz+yz=0.$$

..... (7 分)

类似地, 可以获得其它情形的圆锥面方程. 总结如下：

(i) 包含坐标轴 $+x,+y,+z$, 圆锥面方程为 $xy+xz+yz=0$;

(ii) 包含坐标轴 $+x,+y,-z$, 圆锥面方程为 $xy-xz-yz=0$;

(iii) 包含坐标轴 $+x,-y,+z$, 圆锥面方程为 $-xy+xz-yz=0$;

(iv) 包含坐标轴 $-x,+y,+z$, 圆锥面方程为 $-xy-xz+yz=0$;

(v) 包含坐标轴 $+x,-y,-z$, 圆锥面方程为 $-xy-xz+yz=0$;

(vi) 包含坐标轴 $-x,+y,-z$, 圆锥面方程为 $-xy+xz-yz=0$;

(vii) 包含坐标轴 $-x,-y,+z$, 圆锥面方程为 $xy-xz-yz=0$;

(viii) 包含坐标轴 $-x,-y,-z$, 圆锥面方程为 $xy+xz+yz=0$.

..... (10 分)

三、(本题 14 分) 设实系数多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 分别为: $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, $q(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$. 已知 $q(x)|p(x)$, 且对某个 k 有 $|b_k|>2025^kC_m^k$, 其中 C_m^k 为组合数. 证明: 存在 j 使得 $|a_j|>2024$.

证明. 设 $x_1,\ldots,x_m$ 为 $q(x)$ 的所有复根. 若它们的模均不大于 2025, 则由韦达定理知

$$|b_1|=|-(x_1+\cdots+x_m)|\leqslant 2025m,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|b_k|=|(-1)^k\sum_{i_1<\cdots<i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}|\leqslant 2025^kC_m^k,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|b_m|=|(-1)^mx_1\cdots x_m|\leqslant 2025^m.$$

这与题目所给的条件相矛盾. 结果, $q(x)$ 至少有一个根 y 满足

$$|y|>2025.$$

注意到 $q(x)|p(x)$, 故又有 $p(y)=0$.

..... (10 分)

现假定对所有的 j, $|a_j|\leqslant 2024$. 于是有

$$\begin{aligned}0=&|p(y)|=|y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n|\\ \geqslant&|y^n|-|a_1y^{n-1}|-\cdots-|a_n|\\ \geqslant&|y^n|-2024(|y|^{n-1}+\cdots+|y|+1)\\ =&|y^n|-2024\cdot\frac{|y|^n-1}{|y|-1}\\ =&|y^n|(1-\frac{2024}{|y|-1})+\frac{2024}{|y|-1}>0.\end{aligned}$$

矛盾.

至此, 我们得到必有某个 j, 使得 $|a_j|>2024$. 证毕.

..... (14 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

四、 (本题 20 分) 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 连续, $x_0\in[a,b]$, $x_{n+1}=f(x_n)\,(n\geqslant 0)$.

1. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.
2. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+2025}-x_n\right)=0$, 证明 $\left\{x_n\middle|\, n\geqslant 1\right\}$ 的聚点不超过 2025 个.

证明. 1. 若 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的收敛子列, 设极限为 ξ, 则由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$ 可得 $\{x_{n_k+1}\}$ 亦收敛于 ξ. 进而由 f 的连续性得到

$$f(\xi)=\lim_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to+\infty}x_{n_k+1}=\xi.$$

即 ξ 是 f 的不动点.

..... (3 分)

若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{x_n\}$ 中没有 f 的不动点. 又由于 $\{x_n\}$ 有界, 因此它有两个子列收敛于不同的值 α,β. 设 $\beta>\alpha$.

令 $s\in(\alpha,\beta)$. 任取 $\varepsilon>0$, 有 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时, $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. 由于 β 是 $\{x_n\}$ 子列的极限, 有 $m>N$ 使得 $x_m>s$. 同样, 有 $j>m$ 使得 $x_j<s$. 令 k 为满足 $x_k<s$ 和 $k>m$ 的最小的整数. 则 $0\leqslant x_{k-1}-s\leqslant x_k+\varepsilon-s<\varepsilon$. 因此, s 也是 $\{x_n\}$ 子列的极限, 进而是 f 的不动点.

..... (8 分)

特别地, $[\alpha,\beta]$ 中的点都是 $\{x_n\}$ 的子列的极限以及 f 的不动点. 这样当某个 x_n 属于 $[\alpha,\beta]$ 时, 就有 $x_{n+1}=x_n$, 这显然是不可能的.

总之, $\{x_n\}$ 发散的假设不成立. 因此, $\{x_n\}$ 收敛.

..... (10 分)

2. 对于 $k\geqslant 1$ 以及函数 g. 用 g_k 表示 $\overbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}^{\text{k 个}}$. 令 $F:=f_{2025}$, 则对于 $j\geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(F_{n+1}(x_j)-F_n(x_j)\right)=0$. 由 (1) 的结论可得, 对于固定的 j, $\{F_n(x_j)\}$ 收敛. 特别, 对于 $0\leqslant j\leqslant 2024$, $\{x_{2025n+j}\}$ 收敛. 这意味着 $\{x_n\}$ 的子列极限不超过 2025 个. 从而 $\{x_n\}$ 的聚点不超过 2025 个.

..... (20 分)

五、 (本题 10 分) 设矩阵 M 及其子矩阵 N, P, Q 分别为

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

若它们的行列式分别为 $|M|=12, |N|=1, |P|=2, |Q|=3$, 求平面上由直线 $L_1: a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0, L_2: a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0$ 和 $L_3: a_{31}x+a_{32}y+a_{33}=0$ 所围成的三角形的面积.

解. 首先,由 N, P, Q 的行列式不为 0 可知, L_1, L_2, L_3 两两相交, 进一步由方程组 $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解知, L_1, L_2, L_3 不相交与一点. L_1, L_2, L_3 相交成一三角形.

..... (2 分)

设与 L_1 相对的三角形的顶点为 (x_1, y_1), 与 L_2 相对的三角形的顶点为 (x_2, y_2), 与 L_3 相对的三角形的顶点为 (x_3, y_3), 则所求三角形的面积为 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}\cdot|X|$ 的绝对值, 其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

..... (5 分)

因为点 (x_i, y_i) 在边 L_j 上($j\neq i$), 故有

$$MX=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

其中 d_i 待定. 为求 d_i, 考察线性方程组

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

用克莱姆法则求解之得

$$z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} / |M| = \frac{d_1|N|}{|M|}.$$

另一方面直接可知 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是上述线性方程组的一组解, 故有 $1 = \frac{d_1|N|}{|M|}$, 进而得 $d_1 = \frac{|M|}{|N|} = 12$.

同理可求得: $d_2 = 6, d_3 = 4$.

最后, 由 $|M| \cdot |X| = d_1 d_2 d_3$ 得 $|X| = 24$, 从而所求的三角形面积 $S_\triangle = 12$.

..... (10 分)

六、 (本题 16 分) 给定 $x_0 > y_0 > 0$, 对于 $n \geqslant 0$, 归纳地定义

$$x_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k), \quad y_{n+1} = \Big(\prod_{k=0}^{n} (x_k y_k) \Big)^{\frac{1}{2n+2}}.$$

证明: 1. 数列 $\{x_n - y_n\}$ 收敛于零; 2. 数列 $\{n(x_n - y_n)\}$ 收敛于一个正数.

证明. 1. 对于 $n \geqslant 0$, 我们有

$$x_{n+1} = \frac{(2n+1)x_n + y_n}{2n+2}, \quad y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}}.$$

归纳可证 $x_n > y_n > 0\,(n \geqslant 0)$ 且 $\{x_n\}$ 严格单减, $\{y_n\}$ 严格单增.

..... (3 分)

==========

具体地, 若对某个 $n \geqslant 0$, 有 $x_n > y_n > 0$, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{(2n+1)x_n + y_n}{2n+2} < \frac{(2n+1)x_n + x_n}{2n+2} = x_n, \\ y_{n+1} &= x_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} > y_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} = y_n, \end{aligned}$$

且由 Young 不等式(或直接利用算术几何平均不等式),

$$y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{2n+2}} y_n^{\frac{2n+1}{2n+2}} < \frac{1}{2n+2} x_n + \frac{2n+1}{2n+2} y_n \leqslant \frac{2n+1}{2n+2} x_n + \frac{1}{2n+2} y_n = x_{n+1}.$$

==========

从而 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均有极限, 设为 X 和 Y. 则 $X \geqslant Y$. 我们要证 $X = Y$. 否则 $X > Y > 0$. 则

$$\ln \frac{y_{n+1}}{y_n} = \ln \left(\frac{x_n}{y_n} \right)^{\frac{1}{2n+2}} \sim \frac{1}{(2n+2)} \ln \frac{X}{Y}, \qquad n \to +\infty.$$

因此, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{y_{n+1}}{y_n}$ 发散. 即 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$ 发散, 与 $\{y_n\}$ 收敛于正数 Y 矛盾.
于是 $X = Y$. 即 $\{x_n - y_n\}$ 收敛于零.

..... (8 分)

2. 设 X 同上. 记 $\delta_n = x_n - y_n\,(n \geqslant 0)$, 则 $\{\delta_n\}$ 严格单减趋于 0. 由上述结果, 对

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

$(1+x)^\alpha$ 在 0 点处利用 Lagrange 型余项的 Taylor 公式, 我们有

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} =&\frac{(2n+1)x_n+y_n}{2n+2}-y_n\Big(1+\frac{\delta_n}{y_n}\Big)^{\frac{1}{2n+2}}\\ =&\frac{(2n+1)x_n+y_n}{2n+2}-y_n\Big(1+\frac{1}{2n+2}\frac{\delta_n}{y_n}+O\big(\frac{\delta_n^2}{ny_n^2}\big)\Big)\\ =&\frac{n}{n+1}\delta_n+O\big(\frac{\delta_n^2}{n}\big),\qquad n\to+\infty.\end{aligned}$$

从而

$$\frac{(n+1)\delta_{n+1}}{n\delta_n}=1+O\big(\frac{\delta_n}{n}\big),\qquad n\to+\infty.$$

..... (11 分)

注意到 $\{\delta_n\}$ 收敛于 0, 进而存在 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{(n+1)\delta_{n+1}}{n\delta_n}\leqslant 1+\frac{1}{4n}\leqslant\sqrt{\frac{n+1}{n}},\qquad n\geqslant N.$$

由此可得

$$(n+1)\delta_{n+1}\leqslant\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{N}}N\delta_N,\qquad n\geqslant N.$$

..... (13 分)

这样又有

$$\frac{(n+1)\delta_{n+1}}{n\delta_n}=1+O\big(\frac{\delta_n}{n}\big)=1+O\big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\big),\qquad n\to+\infty.$$

因此 $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\delta_{n+1}}{n\delta_n}$ 收敛. 即 $\{n(x_n-y_n)\}$ 收敛于一个正数.

..... (16 分)

七、(本题 10 分) 验证方程 $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \pm\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 有形如 $x^2+y^2+c^2x^2y^2 = c^2+2xy\sqrt{1-c^4}$ 的通解, 其中 c 是常数. 试求方程 $\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = \pm\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 的通解.

证明. 对关系式 $x^2+y^2+c^2x^2y^2 = c^2+2xy\sqrt{1-c^4}$ 两端关于 x 求导，可得

$$y' = \frac{\sqrt{1-c^4}\,y - x(1+c^2y^2)}{y(1+c^2x^2) - \sqrt{1-c^4}\,x}$$

.....(2 分)

直接计算 $(y')^2$：

$$(y')^2 = \left(\frac{\sqrt{1-c^4}\,y - x(1+c^2y^2)}{y(1+c^2x^2) - \sqrt{1-c^4}\,x}\right)^2 = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}$$

其中

$$\mathrm{I} = \left(\sqrt{1-c^4}\,y - x(1+c^2y^2)\right)^2, \qquad \mathrm{II} = \left(y(1+c^2x^2) - \sqrt{1-c^4}\,x\right)^2.$$

.....(3 分)

下面计算 I 和 II.

$$\begin{aligned}\mathrm{I} =&(1-c^4)y^2 + x^2(1+c^2y^2)^2 - 2xy\sqrt{1-c^4}(1+c^2y^2)\\ =&(1-c^4)y^2 + x^2(1+c^2y^2)^2 - (x^2+y^2+c^2(x^2y^2-1))(1+c^2y^2)\\ =&c^2(1-y^4).\end{aligned}$$

同理，可得分母为 $\mathrm{II} = c^2(1-x^4)$. 因此

$$(y')^2 = \frac{1-y^4}{1-x^4}.$$

故得结论.

.....(5 分)

以下先作形式推导. 作变换

$$u = \sqrt{i}x, \quad v = \sqrt{i}y.$$

则原方程

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = \frac{\pm dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

化为方程

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{\pm du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

.....(7 分)

因此，此方程有通解

$$x^2 i + y^2 i - c_1^2 x^2 y^2 = c_1^2 + 2xyi\sqrt{1-c_1^4},$$

其中 c_1 为复常数.

.....(8 分)

即

$$c_1^2 = \frac{(x^2+y^2-2xy\sqrt{1-c_1^4})}{1+x^2y^2} i.$$

由于 $x(\cdot), y(\cdot)$, 为实值, 所以应该有 $c_1^2 = c^2 i$, 其中 c 为实常数. 由此得到所求方程的通解

$$x^2 + y^2 - c^2 x^2 y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1+c^4}.$$

最后, 类似第 1 部分, 可以直接验证以上确实是原方程 $\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 的通解.

..... (10 分)

注. 用 $-y$ 代替 y, 或以 $-x$ 代替 x, 易见:

(i) $x^2 + y^2 + c^2 x^2 y^2 = c^2 - 2xy\sqrt{1-c^4}$ 也是 $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 的通解.

(ii) $x^2 + y^2 - c^2 x^2 y^2 = c^2 - 2xy\sqrt{1+c^4}$ 也是方程 $\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 的通解.