座号：_____ 考场：_____ 学校：_____ 身份证号：_____ 姓名：_____

密 封 线

第十五届全国大学生数学竞赛暨第十三届广东省大学生数学竞赛试卷

（高职高专类，2023年11月11日）

考试形式：闭卷　考试时间：150分钟　满分：100分

条形码黏贴处

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、 填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

（1） 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____.

（2）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ _____.

（3）设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{3x}-3)(\mathrm{e}^{4x}-4)$，则 $f'(0)=$ _____.

（4）设 $f(x)=|x(1-x)|$，$-1\le x\le 1$，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 _____.

（5）定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$ _____**.**

二、**(本题满分 14 分)** 求函数 $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$ 的单调区间与极值**.**

三、**(本题满分 14 分)** 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

四、**(本题满分 14 分)** 设曲线 C 的方程可表示为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0)$.

（I）过点 $(-1,0)$ 作曲线 C 的切线，求切点 (x_0, y_0)，并写出切线的方程；

（II）求此切线与 C（对应于 $x \leq x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积.

姓名：_____ 身份证号：_____ 学校：_____ 考场：_____ 座号：_____

密 ——— 封 ——— 线

五、**(本题满分 14 分) 设**$0<a<b<\pi$，**证明不等式：** $\dfrac{b\sin b+2\cos b+\pi b}{a\sin a+2\cos a+\pi a}>1$.

六、 **(本题满分 14 分)** 设 $f(x)$ **是** $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数**.** 证明：若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则 $F(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.