第十五届全国大学生数学竞赛初赛试题
及参考解答
（高职高专类，2023 年 11 月 11 日）

一、填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____.

【解】 由题设知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$. 利用洛必达法则，得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，所以 $a=\dfrac{1}{3}$.

（2）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ _____.

【解】 （**方法一**）利用等价无穷小替换，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

（**方法二**）利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=-\frac{1}{2}.$$

（3）设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{3x}-3)(\mathrm{e}^{4x}-4)$，则 $f'(0)=$ _____.

【解】 **注意到 $f(0)=0$，利用导数的定义，得**

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{3x}-3)(\mathrm{e}^{4x}-4)=-6.$$

（4）设 $f(x)=\left|x(1-x)\right|$，$-1\le x\le 1$，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 _____.

【解】 因为 $f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & -1\le x\le 0,\\ x(1-x), & 0<x\le 1,\end{cases}$ 所以 $f'(x)=\begin{cases}2x-1, & -1<x<0,\\ 1-2x, & 0<x<1,\end{cases}$

$$f''(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0,\\ -2, & 0<x<1,\end{cases}$$

因此，当 $-1<x<0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上凹；当 $0<x<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上凸，所以 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（5）定积分 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$ _____ .

【解】 作变量代换：$t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\text{原式}=2\int_0^{\pi}t^2\cos t\mathrm{d}t=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=4t\cos t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=-4\pi .$$

二、（**本题满分 14 分**）求函数 $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$ 的单调区间与极值.

【解】 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$．求导数，得

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}.$$ ---------- 6 分

令 $f'(x)=0$，解得函数 $f(x)$ 的驻点为 $x=0$，$x=2$． ---------- 2 分

由于 $f''(0)=-2<0$，$f''(2)=2>0$，所以 $f(0)=-4$，$f(2)=0$ 分别是函数 $f(x)$ 的极大值和极小值，$(-\infty,0]$ 和 $[2,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调增区间，$[0,1)$ 与 $(1,2]$ 是 $f(x)$ 的单调减区间. ---------- 6 分

三、（**本题满分 14 分**）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

【解】 注意到 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的公分母为 6，可设 $t=\sqrt[6]{1+x}$，则 $\sqrt{1+x}=t^3$，$\sqrt[3]{1+x}=t^2$，而 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，所以 ---------- 4 分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}=6\int\frac{t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$ ---------- 4 分

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln(1+\sqrt[6]{1+x})+C.$$ ---------- 6 分

四、（**本题满分 14 分**）设曲线 C 的方程可表示为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2,\end{cases}(t\ge 0)$.

（I）过点 $(-1,0)$ 作曲线 C 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程；

（II）求此切线与 C（对应于 $x\le x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积.

【解】 （I）因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4-2t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{4-2t}{2t}=\dfrac{2}{t}-1$，所以切线方程为 $y-0=\left(\dfrac{2}{t}-1\right)(x+1)$. ---------- 3 分

设 $x_0=t_0^2+1$，$y_0=4t_0-t_0^2$，因为点 (x_0,y_0) 在切线上，所以 $4t_0-t_0^2=\left(\dfrac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2)$，整理得 $t_0^2+t_0-2=0$. 解得 $t_0=1,-2$（舍去）.

将 $t_0=1$ 代入参数方程，得切点为 $(x_0,y_0)=(2,3)$，故切线方程为

$$y-3=\left(\frac{2}{1}-1\right)(x-2)，即\ y=x+1.$$ ---------- 4 分

（II）注意到 $0\le t\le 1$ 时，$1\le x\le 2$ 且 $0\le y\le 3$. 因此，曲线 C 的方程可表示为

$$y=4\sqrt{x-1}-x+1.$$ ---------- 3 分

故根据题设可知，所求平面图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 3-\int_1^2\left(4\sqrt{x-1}-x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}-\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2$$

$$=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}.$$ ---------- 4 分

五、（本题满分 14 分）设 $0<a<b<\pi$，证明不等式：$\dfrac{b\sin b+2\cos b+\pi b}{a\sin a+2\cos a+\pi a}>1$.

【解】 令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，$0\le x\le\pi$，则 $f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi$，且 $f'(\pi)=0$. ---------- 4 分

又 $f''(x)=-x\sin x<0\ (0<x<\pi)$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调减少，故 $f'(x)>f'(\pi)=0\ (0<x<\pi)$. ---------- 5 分

由此可知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调增加，于是 $f(b)>f(a)>f(0)>0$，即得

$$\frac{b\sin b+2\cos b+\pi b}{a\sin a+2\cos a+\pi a}>1.$$ ---------- 5 分

六、（本题满分 14 分）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 证明：若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则 $F(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【证明】 (**方法一**) 因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，由定积分的周期性，得 $\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$. ---------- 6 分

因此，得

$$\begin{aligned}F(x+2)&=2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\&=2\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t\right]-\left[x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=F(x),\end{aligned}$$ ---------- 6 分

这就证明了，$F(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数. ---------- 2 分

(**方法二**) 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，所以 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $F'(x)=2f(x)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$. ---------- 6 分

欲证 $F(x)$ 是以 2 为周期的函数，即证对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$F(x+2)=F(x)$. 为此，令 $G(x)=F(x+2)-F(x)$，则

$$G'(x)=F'(x+2)-F'(x)=2f(x+2)-2f(x)=0,$$ ---------- 4 分

故 $G(x)=C$. 因为 $F(0)=0$，$F(2)=0$，所以 $G(0)=F(2)-F(0)=0$，由此得 $C=0$. 这就证明了对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$F(x+2)=F(x)$. ---------- 4 分