第十五届全国大学生数学竞赛初赛试题
及参考解答
（高职高专类，2023 年 11 月 11 日）

一、填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____.

（2）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ _____.

（3）设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)(\mathrm{e}^{3x}-3)(\mathrm{e}^{4x}-4)$，则 $f'(0)=$ _____.

（4）设 $f(x)=\left|x(1-x)\right|$，$-1\le x\le 1$，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点为 _____.

（5）定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$ _____**.**

二、（**本题满分 14 分**）求函数 $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$ 的单调区间与极值**.**

三、（**本题满分 14 分**）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$.

四、（**本题满分 14 分**）设曲线 C 的方程可表示为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2,\end{cases}(t\ge 0)$.

（I）过点 $(-1,0)$ 作曲线 C 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程；

（II）求此切线与 C（对应于 $x\le x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积.

五、（本题满分 14 分）设 $0<a<b<\pi$，证明不等式：$\dfrac{b\sin b+2\cos b+\pi b}{a\sin a+2\cos a+\pi a}>1$.

六、（本题满分 14 分）设 $f(x)$ **是** $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数**.** 证明：若 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则 $F(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.