2023 年广东省数学竞赛初赛试题
(民办本科类, 2023年11月11日)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

一、 (本题 30 分, 每小题 6 分) 填空题:

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+\cdots+100^n)^{\frac{1}{n}}$ 的值为 _____.

2. 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)(e^{4x}-4)$. 则 $f'(0)=$ _____.

3. 设 $f(x)=|x(1-x)|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$. 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点为_____.

4. 若常数 a 和 b 使得函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin x+e^x, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数, 则 $a=$_____, $b=$_____.

5. 积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 的值为_____.

二、(本题 14 分) 设 $0<a_1<\pi$, $a_{n+1}=(2\sqrt{a_n}-\sin a_n)\sin a_n$. 求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

三、(本题 14 分) 设 $p>0$, 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$ 的敛散性.

四、(本题 14 分) 设曲线 C 的方程可表示为 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}\quad(t\geqslant 0)$.

1. 过点 $(-1,0)$ 作曲线 C 的切线, 求切点 (x_0,y_0), 并写出切线的方程;
2. 求此切线与 C (对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

五、(本题 14 分) 设 $0<a<b<\pi$. 证明不等式

$$\frac{b\sin b+2\cos b+\pi b}{a\sin a+2\cos a+\pi a}>1.$$

六、(本题 14 分) 求在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方式 $f(x)=x^2+2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ 的所有函数 $f(x)$.