2023 年广东省数学竞赛初赛试题参考解答
(民办本科类, 2023年11月11日)

一、 (本题 30 分, 每小题 6 分) 填空题:

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+\cdots+100^n)^{\frac{1}{n}}$ 的值为 ____100____.

2. 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)(e^{4x}-4)$. 则 $f'(0)=$ ____−6____.

3. 设 $f(x)=|x(1-x)|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$. 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点为____0____.

4. 若常数 a 和 b 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin x+e^x, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数, 则 $a=$____1____, $b=$____1____.

5. 积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 的值为____$\frac{\pi}{2}$____.

二、(本题 14 分) 设 $0 < a_1 < \pi$,

$$a_{n+1} = (2\sqrt{a_n} - \sin a_n)\sin a_n.$$

求数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解 因为 $0 < a_1 < \pi$, 所以 $0 < \sin a_1 < a_1 < 2\sqrt{a_1}$. (.....2 分)

由均值不等式, 有

$$a_2 = (2\sqrt{a_1} - \sin a_1)\sin a_1 \leqslant \left(\frac{(2\sqrt{a_1} - \sin a_1) + \sin a_1}{2}\right)^2 = a_1.$$

因此 $0 < a_2 \leqslant a_1$. (.....5 分)

由题中递推公式, 可归纳证明 $0 < a_{n+1} \leqslant a_n$. 即, $\{a_n\}$ 是单调递减的正数列. 故, $\{a_n\}$ 收敛. (.....2 分)

设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 则 $0 \leqslant a \leqslant a_1$. 再由递推公式, 可知

$$a = (2\sqrt{a} - \sin a)\sin a.$$

注意到 $(2\sqrt{a} - \sin a)\sin a \leqslant \left(\frac{(2\sqrt{a}-\sin a)+\sin a}{2}\right)^2 = a$, 根据均值不等式取等号的条件知, 有 $\sin a = \sqrt{a}$. 若 $a \neq 0$, 则 $a = \sin^2 a \leqslant \sin a < a$. 这是矛盾! 故, $a = 0$. (.....5 分)

三、（本题 14 分）设 $p>0$, 试判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$$

的敛散性.

解 因为 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 是单调递减趋于 0 的数列, 所以根据 Leibniz 判别法可知, 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛. (.....4 分)

因而, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}-\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}\right)$ 有相同的敛散性. (.....2 分)

记

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}-\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}=\frac{1}{n^p(n^p+(-1)^{n-1})}=\frac{1}{n^{2p}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)}.$$

当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 有

$$0<a_n\leqslant\frac{2}{n^{2p}}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2p}}$ 收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. (.....4 分)

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $a_n\geqslant\frac{1}{2n}$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

于是原级数当 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散. (.....4 分)

四、（本题 14 分）设曲线 C 的方程可表示为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} \quad (t \geqslant 0).$

1. 过点 $(-1, 0)$ 作曲线 C 的切线, 求切点 (x_0, y_0), 并写出切线的方程;

2. 求此切线与 C (对应于 $x \leqslant x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4 - 2t$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{4 - 2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1.$$

(.....2 分)

因而曲线的切线方程为

$$y - 0 = \left(\frac{2}{t} - 1\right)(x + 1).$$

(.....2分)

设 $x_0 = t_0^2 + 1,\ y_0 = 4t_0 - t_0^2$. 由于点 (x_0, y_0) 在切线上, 应有

$$4t_0 - t_0^2 = \left(\frac{2}{t_0} - 1\right)(t_0^2 + 2).$$

整理可得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$. 解得 $t_0 = 1$ 和 $t_0 = -2$ (舍去). 将 $t_0 = 1$ 代入参数方程, 得切点为 $(x_0, y_0) = (2, 3)$. 故, 切线方程为

$$y - 3 = \left(\frac{2}{1} - 1\right)(x - 2),$$

即, $y = x + 1$. (.....3 分)

2. 注意到 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时, $1 \leqslant x \leqslant 2$ 且 $0 \leqslant y \leqslant 3$. 因此, 曲线 C 的方程可表示为

$$y = 4\sqrt{x - 1} - x + 1.$$

(.....2 分)

根据题设可知, 所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \int_1^2 \left(4\sqrt{x-1} - x + 1\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{2} - \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2 \\ &= 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

(.....5 分)

五、（本题 14 分）设 $0 < a < b < \pi$. 证明不等式

$$\frac{b\sin b + 2\cos b + \pi b}{a\sin a + 2\cos a + \pi a} > 1.$$

证明 令 $f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. 有 $f'(x) = x\cos x - \sin x + \pi$ 且 $f'(\pi) = 0$. 因为 $f''(x) = -x\sin x < 0\,(0 < x < \pi)$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上严格单调递减. (.....6 分)

故, $f'(x) > f'(\pi) = 0$ $(0 < x < \pi)$. 由此可知
$f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上严格单调递增. (.....5 分)

于是 $f(b) > f(a) > f(0) = 2 > 0$. 这可推出 $f(b)/f(a) > 1$. 即,

$$\frac{b\sin b + 2\cos b + \pi b}{a\sin a + 2\cos a + \pi a} > 1.$$

(.....3 分)

六、（本题 14 分）求在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方式

$$f(x)=x^2+2\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$$

的所有函数 $f(x)$.

解 若 $f(x)$ 是满足条件的连续函数, 则 $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ 可导. 因而由所给方程知 $f(x)$ 也是可导函数. (.....4 分)

对方程两端求导, 得

$$f'(x)=2x+2xf(x).$$

(.....5 分)

令 $g(x)=e^{-x^2}(f(x)+1)$. 可知 $g(x)$ 可导, 且

$$g'(x)=e^{-x^2}\left(f'(x)-2xf(x)-2x\right)=0.$$

这说明 $g(x)$ 是常数. 令 $g(x)=C$. 则有 $f(x)=-1+Ce^{x^2}$. 由所给方程知 $f(0)=0$. 因此 $C=1$. 故, 满足所给方程的函数只有 $f(x)=-1+e^{x^2}$. (.....5 分)