第十四届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答
（非数学专业类，2023 年 5 月 27 日）

一、填空题(本题满分 30 分，每小题 6 分)

（1） 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x-\sin x}=$ _____.

【解】 利用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{1-\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=-2.$$

（2）设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^3}{e^{ax}}\mathrm{d}x=$ _____.

【解】 利用分部积分，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^{ax}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}x^3e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{3}{a}\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{3}{a}\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{a^2}x^2e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{6}{a^2}\int_0^{+\infty}xe^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{6}{a^2}\int_0^{+\infty}xe^{-ax}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{6}{a^3}xe^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{6}{a^3}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x=-\frac{6}{a^4}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{6}{a^4}.$$

(3) 点 $M_0(2,2,2)$ 关于直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=z-3$ 的对称点 M_1 的坐标为

_____.

【解】 过点 $M_0(2,2,2)$ 且垂直于直线 L 的平面 π 的方程为

$$3(x-2)+2(y-2)+z-2=0,\quad \text{即}\quad 3x+2y+z-12=0.$$

将直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=z-3$ 用参数方程可表示为 $x=3t+1,y=2t-4,z=t+3$ 代入平面 π 的方程，得 $3(3t+1)+2(2t-4)+(t+3)-12=0$，解得 $t=1$.

由此可得直线 L 与平面 π 的交点为 $P(4,-2,4)$. 注意到 P 是线段 M_0M_1 的中点，利用中点公式即可解得对称点为 $M_1(6,-6,6)$.

（4）二元函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3+3$ 的所有极值的和等于_____.

【解】 易知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$. 令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$. 因为

$$B^2-AC=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=9-36xy,$$

故在驻点 $(0,0)$ 处，$B^2-AC=9>0$，所以 $f(x,y)$ 不存在极值；在驻点 $(1,1)$ 处，$B^2-AC=-27<0$，且 $A=-6<0$，所以 $f(x,y)$ 取得极大值 $f(1,1)=4$.

因此，函数 $f(x,y)$ 的所有极值的和等于 4.

（5）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n3^n}x^n$ 的收敛域为_____.

【解】 记 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n3^n}$，则级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n}{n+1}=3$.

当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，利用 Leibniz 判别法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

当 $x=-3$ 时，级数成为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散.

因此，原级数的收敛域为 $(-3,3]$.

二、**(本题满分 10 分)** 用正交变换将二次曲面的方程

$$x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz+8yz-27=0$$

化为标准方程, 并说明该曲面是什么曲面.

【解】 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，$X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，则曲面方程为 $X^{\mathrm{T}}AX=27$.

易知，A的特征多项式为$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$，所以$A$的特征值为$\lambda_1=2$(二重)，$\lambda_2=-7$. ---------- 4 分

对于$\lambda_1=2$，解齐次线性方程组$(\lambda_1E-A)X=0$，求得对应的线性无关的特征向量为$\alpha_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，利用 Schmidt 正交化方法，得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

对于$\lambda_2=-7$，解齐次线性方程组$(\lambda_2E-A)X=0$，求得对应的单位化特征向量为$\beta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$. ---------- 3 分

取正交矩阵$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，令$X'=(x',y',z')^{\mathrm{T}}$，则正交变换$X=QX'$将曲面的方程$X^{\mathrm{T}}AX=27$可化为如下标准方程

$$2x'^2+2y'^2-7z'^2=27.$$

这是单叶双曲面. ---------- 3 分

【注】 如采用配方法且过程完整有最后结果，可得 5 分.

三、**(本题满分 12 分)** 设函数$f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶连续导数，$f(0)=g(0)=1$，且对xOy平面上的任一简单闭曲线C，曲线积分

$$\oint_C\left[y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)\right]\mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y=0,$$

求函数$f(x)$，$g(x)$.

【解】 记$P(x,y)=y^2f(x)+2ye^x-8yg(x)$，$Q(x,y)=2[yg(x)+f(x)]$. 根据题设条件可知$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由此得

$$y\left[g'(x)-f(x)\right]+f'(x)+4g(x)-e^x=0.$$

从而有$\begin{cases}g'(x)-f(x)=0,\\ f'(x)+4g(x)=e^x.\end{cases}$ 可得 $g''(x)+4g(x)=e^x$. ---------- 5 分

这是关于 $g(x)$ 的常系数非齐次二阶线性微分方程，解得

$$g(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$

利用 $g(0)=1$， $g'(0)=f(0)=1$，即 $\begin{cases}C_1+\dfrac{1}{5}=1,\\ 2C_2+\dfrac{1}{5}=1,\end{cases}$ 解得 $C_1=\dfrac{4}{5}$， $C_2=\dfrac{2}{5}$，因此

$$g(x)=\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$ ---------- 5 分

此外，再由 $g'(x)-f(x)=0$ 即可解得

$$f(x)=-\frac{8}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$ ---------- 2 分

四、**(本题满分 12 分)** 求由 xOz 平面上的曲线 $\begin{cases}(x^2+z^2)^2=4(x^2-z^2)\\ y=0\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转而成的曲面所包围区域的体积.

【解】 曲面的方程为：$(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+y^2-z^2)$. ---------- 2 分

采用球面坐标：$x=\rho\cos\theta\sin\varphi$， $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$， $z=\rho\cos\varphi$，曲面的方程可表示为：$\rho=2\sqrt{-\cos 2\varphi}$， $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$. 根据区域的对称性，得

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sqrt{-\cos 2\varphi}}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{32\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

---------- 4 分

再先后作变量代换：$t=\cos\varphi$， $\sqrt{2}t=\sin u$，得

$$V=\frac{32\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u.$$ ---------- 3 分

利用 Wallis 公式得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{16}$，所以

$$V=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\frac{3\pi}{16}=\sqrt{2}\pi^2.$$ ---------- 3 分

五、**(本题满分 12 分)** 证明下列不等式：

（1）设 $x\in[0,\pi]$， $t\in[0,1]$，则 $\sin tx\geq t\sin x$；

（2）设 $p>0$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p\mathrm{d}u\geq\dfrac{\pi}{2(p+1)}$；

（3）设 $x\geq 0$， $p>0$，则 $\int_0^x|\sin u|^p\mathrm{d}u\geq\dfrac{x|\sin x|^p}{p+1}$.

【解】 (1) 令 $F(t)=\sin xt-t\sin x$，则 $F(0)=F(1)=0$， $F''(t)=-x^2\sin xt\leq 0$.

当 $x\in[0,\pi]$，$t\in[0,1]$ 时，有 $F(t)\geq 0$，即 $\sin tx\geq t\sin x$. ---------- 3 分

(2) 设 $p>0$，令 $u=\dfrac{\pi}{2}t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left|\sin\frac{\pi}{2}t\right|^p\mathrm{d}t\geq\frac{\pi}{2}\int_0^1\left|t\sin\frac{\pi}{2}\right|^p\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2(p+1)}.$$

---------- 4 分

(3) 根据对称性，并利用上述结果，得 $\int_0^{\pi}|\sin u|^p\mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p\mathrm{d}u\geq\dfrac{\pi}{p+1}$.

对于 $x\geq 0$，存在非负整数 $k\geq 0$，使得 $x=k\pi+v$，其中 $v\in[0,\pi)$. 根据定积分的周期性特征，有 $\int_0^{k\pi}|\sin u|^p\mathrm{d}u=k\int_0^{\pi}|\sin u|^p\mathrm{d}u$， $\int_{k\pi}^x|\sin u|^p\mathrm{d}u=\int_0^v|\sin u|^p\mathrm{d}u$.

类似于第(2)题可证， $\int_0^v|\sin u|^p\mathrm{d}u\geq\dfrac{v|\sin v|^p}{p+1}$，因此

$$\int_0^x|\sin u|^p\mathrm{d}u=\int_0^{k\pi}|\sin u|^p\mathrm{d}u+\int_{k\pi}^x|\sin u|^p\mathrm{d}u=k\int_0^{\pi}|\sin u|^p\mathrm{d}u+\int_0^v|\sin u|^p\mathrm{d}u$$

$$\geq\frac{k\pi}{p+1}+\frac{v|\sin v|^p}{p+1}\geq\frac{x|\sin x|^p}{p+1}.$$

---------- 5 分

六、**(本题满分 12 分)** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上具有一阶连续导数，证明： $\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x\geq\sqrt{(a-b)^2+[f(a)-f(b)]^2}$，并给出等号成立的条件.

【解】 令 $F(t)=\int_a^t\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x-\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}$，则 $F(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内具有一阶连续导数，且

$$F'(t)=\sqrt{1+[f'(t)]^2}-\frac{(t-a)+[f(t)-f(a)]f'(t)}{\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}}$$

---------- 5 分

$$=\frac{\sqrt{1+[f'(t)]^2}\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}-\big[(t-a)+[f(t)-f(a)]f'(t)\big]}{\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}}.$$

对任意$t\in(a,\ b)$，利用 Cauchy 不等式，恒有

$$1\cdot(t-a)+f'(t)[f(t)-f(a)]\le\sqrt{1+[f'(t)]^2}\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}\ ,$$

可知$F'(t)\ge 0$，所以$F(t)$在$[a,\ b]$上单调递增. 故$F(b)\ge F(a)=0$，即得所证.

---------- 4 分

进一步, 等号成立当且仅当 $f'(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=k$（实常数），即

$$f(t)=f(a)+k(t-a)\ ,\quad \forall\, t\in[a,\ b]$$

此时曲线$y=f\left(x\right)$为直线. ---------- 3 分

七、**(本题满分 12 分) 证明**级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$收敛，并求其和.

【解】 记$a_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则级数化为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$.

因为$x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$，所以$n\to\infty$时，有$a_{2n}a_{2n+1}\sim\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$，而级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$显然收敛，所以$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$收敛. ---------- 4 分

再求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$的和. 令$\displaystyle b_n=\sum_{k=n}^{2n-1}a_k^2, n=1,2,\cdots$，则由$a_n=a_{2n}+a_{2n+1}$得

$$b_n-b_{n+1}=a_n^2-a_{2n}^2-a_{2n+1}^2=\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)^2-a_{2n}^2-a_{2n+1}^2=2a_{2n}a_{2n+1}.$$

---------- 4 分

由于$0<b_n<n\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，故由夹逼准则可知$b_n\to 0(n\to\infty)$. 于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(b_n-b_{n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}(b_1-b_{N+1})=\frac{b_1}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}.$$

---------- 4 分