广东省大学生数学竞赛题（高职高专类）答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

1. $\dfrac{2021\times 2022}{2}=2021\times 1011=2043231$

2. $-\dfrac{f''(x)}{f'^{3}(x)}$

3. $y=2e(x+1)$

4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

5. $f(-x)dx$

二．(10 分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)}{x\ln(1+\cos x-1)}$$ ……4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\cos x-1)}$$ ……7 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\cos x-1}=-1$$ ……10 分

三（12 分）．

设 $g(x)=x(1-x)f(x)$，……4 分

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、在 $(0,1)$ 内可导，又 $g(0)=0=g(1)$，

所以由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$，即……8 分

$$g'(\xi)=(1-2\xi)f(\xi)+\xi(1-\xi)f'(\xi)=0,$$

所以 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-1}{\xi(1-\xi)}f(\xi).$ ……12 分

四（12 分）．因为 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+5f''(x)}{x}=7$，所以

$$f''(0)=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=0,$$

$$7=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)+5f''(x)}{x}-\frac{f'(x)}{x}\right)=5\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}$$

所以$f'''(0)$存在，并且 $f'''(0)=\frac{7}{5}$.

五（12 分）.

容易求得 $f(x)=\begin{cases}1, -e<x\le e,\\ \ln x, \quad x>e.\end{cases}$ 所以

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^e dx+\int_e^3 \ln x dx=e+3(\ln 3-1)$$

六（12 分）. 设切点为(x_0, e^{x_0}), 于是由切线方程 $y=e^{x_0}x$ 得到$e^{x_0}=e^{x_0}\cdot x_0$, 所以 $x_0=1$. 因此切点为$(1,e)$, 切线方程 $y=ex$.

面积 $A=\int_0^1 (e^x-ex)dx=\frac{e}{2}-1$

体积$V=\pi\int_0^1 (e^{2x}-e^2x^2)dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}e^2-1\right)$

七（12 分）

显然 $x_n>0$.

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{4}{x_n}\right)\ge\sqrt{x_n\cdot\frac{4}{x_n}}=2，\text{所以}\{x_n\}\text{有下界.}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n^2+4}{2x_n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{x_n^2}\right)\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{4}\right)=1，\text{所以}\{x_n\}\text{单调减少.}$$

所以$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，记$\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $a=\frac{a^2+4}{2a}$, 因此$\lim_{n\to\infty}x_n=2$.