第十四届全国大学生数学竞赛初赛（补赛）试卷

（非数学类，2022年）

考试形式：闭卷　考试时间：150分钟　满分：100分

条形码黏贴处

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]=$ _____.

2、设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某一邻域内可微，且满足

$$f(1+x)-3f(1-x)=4+2x+o(x),$$

其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时 x 的高阶无穷小，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 _____.

3、设 $y=y(x)$ 是初值问题 $\begin{cases} y''-2y'-3y=1, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ 的解，则 $y(x)=$ _____.

4、设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z^2$，又设 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，$w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，则对函数 $w=w(u,v)$，偏导数 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=$ _____.

5、设 $a>0$，则均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$ 的重心坐标为 _____.

姓名：_____　身份证号：_____　学校：_____　考场：_____　座号：_____

密 ——— 封 ——— 线

二、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \frac{t^{2023}}{1+t^2}\mathrm{d}t$，正整数 $n\le 2023$，求导数 $f^{(n)}(0)$.

三、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\dfrac{x}{3})}{x}=0$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

四、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=2$．证明：存在两两互异的点 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\geq 2$．

姓名：_____ 身份证号：_____ 学校：_____ 考场：_____ 座号：_____
密 ——— 封 ——— 线

五、(本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续的偶函数，计算曲线积分：

$I=\oint_L \dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$，其中曲线 L 为正向圆周 $x^2+y^2=-2y$.

六、(本题满分 14 分) 设函数 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+e^{-t}\sin^3 t}\mathrm{d}t$，$(x>0)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛，且 $\frac{1}{3}<\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})<\frac{5}{6}$.