姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试卷
(数学 **B** 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设空间直角坐标系中三角形 ABC 的三个顶点坐标为: $A=(1,2,3)$, $B=(2,3,1)$, $C=(3,1,2)$. M 为三角形 ABC 的三中线交点(重心). 求过点 M 的平面方程, 该平面与三角形 ABC 垂直, 且与直线 BC 平行.

得分	
评阅人	

二、 (本题 15 分) 设 $\Gamma = \{\{(x_n\}\big|x_n = 0, 2\}$, 即 Γ 为全体各项为 0 或 2 的数列构成的集合. 对于任何 $x = \{x_n\} \in \Gamma$，令

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad f(x) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证明: 1. Π 是单射; 2. 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点; 3. $f(\Gamma) = [0, 2]$.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、 (本题 15 分) 设 $n \geq 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为数域 K 上的方阵, 它们的极小多项式两两互素. 证明: 给定数域 K 上的任意多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in K[x]$, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $f(A_i) = f_i(A_i)$.

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $-1, 1, 1$. 又 A 的与特征值 -1 相对应的一个特征向量为 $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 A.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 $x \in [0,1]$, $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_{n+1} = \dfrac{x - y_n^2}{2}$ $(n \geqslant 1)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 存在并求其值.

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $a > 1$. 在 $[0, +\infty)$ 上定义函数 f:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, a) \\ (-1)^{k+1}, & x \in [a^k, a^{k+1}), k \geqslant 1. \end{cases}$$

定义 $a_n = \int_0^n f(x)\,dx$. 求 $A \equiv \left\{ \beta \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta} \text{ 绝对收敛} \right\}$ 以及 $B \equiv \left\{ \beta \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\beta} \text{ 收敛} \right\}$.