姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十四届全国大学生数学竞赛初赛第二次补赛试卷
(数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 在空间直角坐标系中设单叶双曲面 S 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 求 S 上所有可能的点 $P=(a,b,c)$，使得过 P 点且落在 S 上的两条直线均平行于平面 $x+y-z=0$.

得分	
评阅人	

二、 (本题 15 分) 设 $\Gamma = \{\{(x_n\}\big|x_n = 0, 2\}$, 即 Γ 为全体各项为 0 或 2 的数列构成的集合. 对于任何 $x = \{x_n\} \in \Gamma$，令

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad f(x) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证明: 1. Π 是单射; 2. 集合 $\Pi(\Gamma)$ 中的每一点均为 $\Pi(\Gamma)$ 的聚点; 3. $f(\Gamma) = [0, 2]$.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、 (本题 15 分) 设 $n \geq 2$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为数域 K 上的方阵, 它们的极小多项式两两互素. 证明: 给定数域 K 上的任意多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in K[x]$, 存在多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得对所有 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $f(A_i) = f_i(A_i)$.

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 A, B 都是秩为 r 的 n 阶不可逆实矩阵, I 和 J 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两个 $r+1$ 元子集. 用 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶实矩阵构成的集合, 令

$V = \{C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid c_{ij} = 0 \text{ 若 } i \notin I \text{ 或 } j \notin J\}$.

证明: 存在 $0 \neq C \in V$ 使得 $ACB = 0$.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可导, 且对任何 $x \in [a,b]$, $g'(x) \neq 0$. 又 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $A = \left\{\sqrt{\frac{m}{n}}\middle| m,n\text{为正整数}\right\} \setminus \mathbb{Q}$, $x_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. 对于 $x>0$, 定义 $f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{为无理数,} \\ \frac{1}{q^\alpha}, & x=\frac{p}{q}\text{为既约分数.} \end{cases}$

证明: 1. 对任何 $x \in A$, 存在常数 $M_x > 0$ 使得对任何既约分数 $\frac{p}{q}$ 都有 $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{M_x}{q^2}$. 2. f 在 A 中每个点可微的充要条件是 $\alpha > 2$. 3. 对任何 α, 函数 f 在 x_0 处均不可微.