姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线　答题时不要超过此线

第十四届全国大学生数学竞赛初赛补赛试卷
(数学 B 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在指定的答题纸上。
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 给定三个曲面

$$\pi_1 : x + y + z + 1 = 0,$$
$$\pi_2 : x + \lambda y + \mu z - 1 = 0,$$
$$\pi_3 : x + \lambda^2 y + \mu^2 z = 0,$$

其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。求 π_1, π_2, π_3 交于一点的条件，而且当它们交于一点时，求该点的坐标。

二、 (本题 15 分) 设 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数, 求证:

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \left(t^3 + (1-t)^3\right) f(t)\,dt.$$

三、 (本题 15 分) 设 $n \geqslant 2$, A 为 n 阶实对称阵, $v = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)^{\mathrm{T}}$, $w = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)^{\mathrm{T}}$, 分别是 A 关于其特征值 μ_1, μ_2 的实特征向量, $\mu_1 \neq \mu_2$. 令

$$B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix},$$

求矩阵 B 的所有特征值.

四、 (本题 20 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 所有元素 a_{ij} 皆非负, 且对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有 $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{ij} < 1$. 证明：矩阵 $E + A$ 的行列式必大于 0, 这里 E 为 n 阶单位矩阵.

五、 (本题 15 分) 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 在 $(0, 1)$ 内三阶可导, $f(0) = 2, f(1) = 1, f'(0) = 0, f'(1) = 4$. 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 24 + 24\xi$.

六、 (本题 20 分) 设 $f_k(x) = \begin{cases} \sin^k \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 试问: f_2, f_3 在 $(-\infty, +\infty)$ 是否有原函数? 请证明你的结论.