姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线　答题时不要超过此线

第十四届全国大学生数学竞赛初赛补赛试卷
(数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在指定的答题纸上。
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 已知圆柱面经过一条母线 $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 以及两点 $(0,0,2)$ 与 $(1,-1,-1)$。求该圆柱面的表达式。

二、 (本题 15 分) 设 f 是 $[0,1]$ 上的凸函数, 求证:

$$\int_0^1 t(1-t)f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \left(t^3+(1-t)^3\right)f(t)\,dt.$$

三、 (本题 15 分) 设 $n \geqslant 2$, A 为 n 阶实对称阵, $v = \left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)^{\mathrm{T}}$, $w = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)^{\mathrm{T}}$, 分别是 A 关于其特征值 μ_1, μ_2 的实特征向量, $\mu_1 \neq \mu_2$. 令

$$B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix},$$

求矩阵 B 的所有特征值.

四、 (本题 20 分) 设 A, B 为数域 K 上的两个 n 阶矩阵. 若存在正整数 m 使得 $AB - BA = A^m$, 证明对任何正整数 k, 矩阵 $A^k + E$ 的行列式等于 1, 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

五、 (本题 15 分) 设 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 对于 $n \geqslant 0$, 定义 $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + x_n y_n + 2y_n^2 + 1}, \\ y_{n+1} = \frac{1}{2x_n^2 + x_n y_n + y_n^2 + 1}. \end{cases}$

证明: (1) $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0$. (2) 点列 $\{x_n\}$ 收敛.

六、 (本题 20 分) 设 $\psi(s) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+sx)}{x(1+x)}\, dx$. 证明:

(1) $\psi(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. (2) 对于 $s > 0$, 有 $\psi(s) + \psi\big(\dfrac{1}{s}\big) = \dfrac{\pi^2}{3} + \dfrac{1}{2}\ln^2 s$.