第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题
及参考解答
（高职高专，2022 年 11 月 12 日）

一、填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 函数 $y=3\cos x+4\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 的值域为 _____.

【解】 答案：$[-5,5]$.

（2）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=$ _____.

【解】 根据定积分的定义，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+x)^2\Big|_0^1=\frac{3}{2}.$$

（3）极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$ _____.

【解】 利用洛必达法则，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x+2\cos x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2+2\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x}=\frac{1}{2}.$$

（4）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的间断点为 $x=$ _____.

【解】 易知，复合函数 $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}1, & g(x)>0,\\ 0, & g(x)\le 0,\end{cases}=\begin{cases}1 & x\ne 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 所以 $f\left[g(x)\right]$ 的惟一间断点为 $x=1$.

（5）设 $x^y=y^x$，其中 y 是 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ _____.

【解】 本题是隐函数的求导问题． 这里采用计算自变量与函数的微分之商的方法来求导数．**对等式** $x^y=y^x$ **两边取对数，得** $y\ln x=x\ln y$．两边求微分，可得 $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y=\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y+\ln y\mathrm{d}x$，即 $\left(\dfrac{y}{x}-\ln y\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y$，**于是**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}.$$

二、（本题满分 14 分）计算：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x$.

【解】 作变量代换：$x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos t}}{e^{\sin t}+e^{\cos t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

三、（本题满分 14 分）设 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间、极值点，及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

【解】 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$．求导数，得

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

令 $f'(x)=0$，解得函数 $f(x)$ 的驻点为 $x=-1$， $x=3$. ---------- 6 分

由于 $f''(-1)=-\frac{1}{4}<0$， $f''(3)=\frac{1}{4}>0$，所以 $f(-1)=-2$， $f(3)=0$ 分别是函数 $f(x)$ 的极大值和极小值，$(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调增区间，$[-1,3]$ 是 $f(x)$ 的单调减区间. ---------- 6 分

又当 $x<1$ 时 $f''(x)<0$，当 $x>1$ 时 $f''(x)>0$，所以曲线 $y=f(x)$ 的凸区间为 $(-\infty,1)$，凹区间为 $(1,+\infty)$. ---------- 2 分

四、（本题满分 14 分）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$，其中 $-1<x<1$.

【证】 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，由于 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为偶函数，故只需证明：当 $0<x<1$ 时， $f(x)\geq 0$. ---------- 4 分

因为

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

且当 $0<x<1$ 时， $\ln\frac{1+x}{1-x}>0,\ x>\sin x>0$，所以

$$f'(x)>\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x>\frac{2x}{1-x^2}-2x=\frac{2x^3}{1-x^2}>0,$$ ---------- 8 分

即当 $0<x<1$ 时， $f(x)$ 单调增加， $f(x)\geq f(0)=0$，故 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$.

综上可知，当 $-1<x<1$ 时， $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$. ---------- 2 分

五、（本题满分 14 分）设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定的隐函数，求函数 $y=y(x)$ 的极值.

【解】 对方程两端关于 x 求导，得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0,$$

即 $(2x+y)y+(x^2+2xy+3y^2)y'=0$，令 $y'=0$，解得 $y=-2x$ 或 $y=0$（不适合方程，舍去）. ---------- 6 分

将 $y=-2x$ 代入原方程得 $-6x^3+6=0$，解得驻点 $x=1$，函数值 $y(1)=-2$.

再求导，得

$$(x^2+2xy+3y^2)y''+2(x+3y)(y')^2+4(x+y)y'+2y=0.$$

将 $x=1$，$y=-2$，及 $y'=0$ 一并代入上式，解得 $y''\big|_{(1,-2)}=y''(1)=\frac{4}{9}>0$.

---------- 6 分

因此，$x=1$ 是函数 $y(x)$ 的极小值点，且极小值 $y(1)=-2$. ---------- 2 分

六、（本题满分 14 分）求曲线 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\ (y>0)$ 的经过点 $(0,4)$ 的切线与该曲线所围成的平面图形的面积.

【解】 设 L 与 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切于点 (x_0,y_0)，则 $\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{4}=1$. ---------- 2 分

另一方面，对 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 求导，得 $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}y'=0$，所以切线斜率为

$$y'=-\frac{4x_0}{3y_0}=\frac{y_0-4}{x_0},$$

解得 $x_0=\pm\frac{3}{2}$，$y_0=1$. 根据对称性，所求面积为

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot3+\frac{3}{2}\cdot1\right)-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{15}{2}-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x.$$ ---------- 6 分

作变换：$x=\sqrt{3}\sin t$，得

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2t)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\frac{3}{8}.$$

因此　$S=\dfrac{15}{2}-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\dfrac{15}{2}-4\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}+\dfrac{3}{8}\right)=6-\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.　---------- 6 分