第十四届全国大学生数学竞赛初赛试题
及参考解答
（经管类，2022 年 11 月 12 日）

一、填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$ _____ .

【解】 利用洛必达法则，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\dfrac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x+2\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{2+2\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x}=\frac{1}{2}.$$

（2）设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1 & x\ge 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 则复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的间断点为 $x=$ _____ .

【解】 易知，复合函数 $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}1, & g(x)>0,\\ 0, & g(x)\le 0,\end{cases}=\begin{cases}1 & x\ne 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 所以 $f\left[g(x)\right]$ 的惟一间断点为 $x=1$.

（3）极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$ _____ .

【解】 易知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$，所以

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x)=2.$$

（4）设 $x^y=y^x$，其中 y 是 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ _____ .

【解】 本题是隐函数的求导问题． 这里采用计算自变量与函数的微分之商的方法来求导数．对等式 $x^y=y^x$ 两边取对数，得 $y\ln x=x\ln y$.

再对上式两边求微分， 得 $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y=\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y+\ln y\mathrm{d}x$，即

$$\left(\frac{y}{x}-\ln y\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x}{y}-\ln x\right)\mathrm{d}y.$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$.

（5）设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定的隐函数，则 $y=y(x)$ 的极小值为_____.

【解】 对方程两端关于 x 求导，得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0,$$

即 $(2x+y)y+(x^2+2xy+3y^2)y'=0$，令 $y'=0$，解得 $y=-2x$ **或** $y=0$（不适合方程，舍去）．将 $y=-2x$ 代入原方程得 $-6x^3+6=0$，解得 $y(x)$ 的驻点 $x=1$，及函数值 $y(1)=-2$.

再求导，得

$$(x^2+2xy+3y^2)y''+2(x+3y)(y')^2+4(x+y)y'+2y=0.$$

将 $x=1$，$y=-2$，及 $y'=0$ 一并代入上式，解得 $y''\big|_{(1,-2)}=y''(1)=\frac{4}{9}>0$.

因此，$x=1$ 是函数 $y(x)$ 的极小值点，且极小值 $y(1)=-2$.

二、（**本题满分 10 分**）计算：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x$.

【解】 作变量代换：$x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos t}}{e^{\sin t}+e^{\cos t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

三、（**本题满分 12 分**）求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和.

【解】 利用三角公式，得

$$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}}{1+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}}=\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1},$$

---------- 4 分

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{2k-1}-\arctan\frac{1}{2k+1}\right)=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2n+1}.$$

---------- 4 分

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}=\frac{\pi}{4}$. ---------- 4 分

四、（**本题满分 12 分**）证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$，其中 $-1<x<1$.

【证】 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，由于 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为偶函数，故只需证明：当 $0<x<1$ 时，$f(x)\geq 0$. ---------- 2 分

因为

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x,$$

且当 $0<x<1$ 时，$\ln\frac{1+x}{1-x}>0,\ x>\sin x>0$，所以

$$f'(x)>\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x>\frac{2x}{1-x^2}-2x=\frac{2x^3}{1-x^2}>0,$$ ---------- 6 分

即当 $0<x<1$ 时，$f(x)$ 单调增加，$f(x)\geq f(0)=0$，故 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$.

综上可知，当 $-1<x<1$ 时，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$. ---------- 4 分

五、（本题满分 12 分）求曲线 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\ (y>0)$ 的经过点 $(0,4)$ 的切线与该曲线所围成的平面图形的面积.

【解】 设 L 与 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切于点 (x_0,y_0)，则 $\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{4}=1$.

对 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 求导，得 $\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}y'=0$，所以切线斜率为 $y'=-\frac{4x_0}{3y_0}=\frac{y_0-4}{x_0}$，解得 $x_0=\pm\frac{3}{2}$，$y_0=1$．根据对称性，所求面积为

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3+\frac{3}{2}\cdot 1\right)-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{15}{2}-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x.$$ ---------- 6 分

作变换：$x=\sqrt{3}\sin t$，得

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\frac{3}{8}.$$

因此 $S=\frac{15}{2}-4\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{15}{2}-4\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\frac{3}{8}\right)=6-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. ---------- 6 分

六、（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的正值函数，M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$

上的最大值，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}=M$.

【证】 因为 M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，所以

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}<\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b M^n\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{M}{\sqrt[n]{b-a}}\to M\,.$$ ---------- 4 分

另一方面，设 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=M$，因为 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续，所以对**任意小的** $\varepsilon>0$，存在 $[c,d]$ 使得当 $x\in[c,d]\subseteq[a,b]$ 时， $f(x)>f(x_0)-\varepsilon=M-\varepsilon$，因此

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}\geq\left\{\frac{1}{b-a}\int_c^d (M-\varepsilon)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{d-c}{b-a}}(M-\varepsilon)\to M-\varepsilon\ （n\to\infty）$$

---------- 4 分

由于 ε 的任意性，并根据夹逼准则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}=M\,.$$ ---------- 4 分

七、（本题满分 12 分）设年利率为 α $(0<\alpha<1)$，依复利计算（所谓复利，是指过一定时间，将存款所产生的利息自动转为本金再产生利息，并逐期滚动），欲在第 n 年末提取 n^2 元 $(n=1,2,\cdots)$，并且永远能如此提取，问开始至少需要存入本金为多少元（最后需算出与 n 无关的结果）？

【解】 设初始存入本金为 A_0，根据复利定义，则第 n 年末本金及利息和为 $A_0(1+\alpha)^n$. 所以 $A_0(1+\alpha)^n=n^2$，$A_0=n^2(1+\alpha)^{-n}$. 由于要永远能如此提取，因此所需本金总数为 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(1+\alpha)^{-n}$. ---------- 4 分

令 $x=\dfrac{1}{1+\alpha}$，则 $0<x<1$，$A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，所以本金总数 A 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和.

由 $n^2=(n+1)n-(n+1)+1$，可得

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''-\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'+\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}-\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$ ---------- 6 分

最后，将 $x=\frac{1}{1+\alpha}$ 代入上式并整理，得 $A=\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{\alpha^3}$. ---------- 2 分