姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷
(数学 B 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间直角坐标系中两平面 $x+y+z-3=0$ 和 $x-2y-z+2=0$ 的交线为 L. 求过点 $(1,2,3)$ 并与直线 L 垂直的平面方程.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 与 A 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 k 使得 $B = A^k$.

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&y_1&y_2\\y_2&\frac{8}{3}&y_1\\y_1&y_2&\frac{8}{3}\end{pmatrix}$ 为复数域上的两个 3 阶方阵，其中 x, y_1, y_2 为未知复数. 若已知 A 与 B 有相同的 Jordan 标准型, 求 x, y_1, y_2.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,(n\geqslant 0)$. 证明：级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛并求它的和.

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 证明: (1) 对任意 $0 < a < 1$, 存在唯一实数 $b > 1$ 满足 $a - \ln a = b - \ln b$; (2) 对于上述数对 a, b 有 $ab < 1$; (3) 对于上述数对 a, b 有 $b + \ln a > 1$.