姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十四届全国大学生数学竞赛预赛试卷
(数学 A 类, 2022 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中已知单叶双曲面 S 的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 求过 $P=(1,1,1)$ 点落在单叶双曲面 S 上的两条直线之间的夹角.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 与 A 可交换, 其元素均为正整数且行列式为 1. 证明存在正整数 k 使得 $B = A^k$.

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $n \geq 2$ 为正整数, 证明多项式 $f(x) = x^n - x - 1$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$, 函数 f 在 $[-1,2]$ 上有界，在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\Big(\dfrac{k}{n}+\beta_n\Big)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx.$

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 的任意闭区间上 Riemann 可积. 对于 $x \geqslant 0$, 定义 $F(x)=\int_0^x t^\alpha f(t+x)\,dt$.

(1) 若 $\alpha \in (-1,0)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 证明: F 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 若 $\alpha \in (0,1)$, f 以 $T>0$ 为周期, $\int_0^3 f(t)\,dt = 2022$. 证明: F 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续.