姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十四届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2023 年 5 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	20	10	14	20	10	16	10	100
得分								

注意: 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 由方程 $\begin{cases} x+y=t, \\ x^2-y^2=t \end{cases}$ 确定的曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为

$y=x-1$.

2. 记 L 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$ 则曲线积分 $\int_L (2x^2+x+y^2+y)\,ds =$

2π.

3. 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵. 若 $A^n=0$ 但 $A^{n-1}\neq 0$, 则 A 的秩为 $n-1$.

4. 设 $\mathbb{R}$ 上函数 f 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt+x^2\,(x\in\mathbb{R})$.

则 $f(x)=$ $2e^x-2x-2.$.

二、(本题 10 分) 设二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 得此曲线的另一表达式.

(i) 求证 B^2-4AC 与 F 为上述正交变换的不变量;

(ii) 给出在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件.

解答. (i) Q 为正交矩阵, 因此, 有 $\theta\in[0,2\pi]$ 和 $\varepsilon=\pm1$ 使得

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta\\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\cos\theta-y'\varepsilon\sin\theta\\ x'\sin\theta+y'\varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}.$$

代入 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 得到

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

其中 $F'=F$,

$$\begin{aligned}A'&=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,\\ \varepsilon B'&=(C-A)\sin(2\theta)+B\cos(2\theta),\\ C'&=A\sin^2\theta-B\cos\theta\sin\theta+C\cos^2\theta.\end{aligned}$$

直接计算可得 $B'^2-4A'C'=B^2-4AC$, $F'=F$. 这就证明了 B^2-4AC 与 F 是正交变换的不变量.

..... (7 分)

注. 事实上,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}Q\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}Q\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+F=0.$$

因此, $F'=F$,

$$\begin{aligned}A'C'-\frac{B'^2}{4}&=\det\begin{pmatrix}A' & \frac{B'}{2}\\ \frac{B'}{2} & C'\end{pmatrix}=\det\left[Q^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}Q\right]\\ &=\det\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}=AC-\frac{B^2}{4}.\end{aligned}$$

(ii) 依题意可知, 在上述正交变换下, 交叉项 $x'y'$ 系数为零的充要条件为 $B'=0$, 即 $(C-A)\sin(2\theta)+B\cos(2\theta)=0$.

..... (10 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

三、(本题 14 分) 设实系数多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, 其中 $a_m \neq 0$, $m \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k = a \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} ka_k = b \neq 0$. 证明: 对任意大于等于 2 的自然数 n 以及任意的 $\varepsilon \neq 0$, 必存在 n 阶复方阵 C, 使得 $f(C) = \begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$.

证明. 记 $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $J = I + H$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵. 则有

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, H^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, H^n = 0;$$

$$J^2 = (I+H)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$J^k = (I+H)^k = \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & C_k^1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \cdots.$$

于是

$$\begin{aligned} f(J) &= a_0I + a_1J + \cdots + a_mJ^m \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_1 & a_1 \\ & & & a_1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_m & C_m^1a_m & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_m & C_m^1a_m \\ & & & a_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7\text{ 分})$$

令 $W = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a & b \\ & & & a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & \varepsilon \\ & & & a \end{pmatrix}$. 分别计算 W, V 的 Jordan 标准型 J_W 和 J_V.

注意到 W 的 n 个特征值均为 a, 进一步, 由 $W - aI = \begin{pmatrix} 0 & b & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & b \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 可知, $W - aI$ 有 $n-1$ 阶子式 $\begin{vmatrix} b & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & b \end{vmatrix} = b^{n-1} \neq 0$. 故秩 $(W - aI) = n - 1$, 从而 a 作为 W 的特征值其几何重数为 1. 也就是 J_W 中相应于a 的 Jordan 块只有1块, 即:

$$J_W = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

同理, 由 $\varepsilon \neq 0$ 可知, $J_V = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$. 故有:存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}WP = V$. 即 $P^{-1}f(J)P = V$. 令 $C = P^{-1}JP$, 则 $f(C) = V$. 证毕.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

式的 Q, 我们有 $Q^n = 0$, 且由展开 $(Q + Q^2 g(Q))^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 可得

$$\begin{cases} Q + c_{1,2}Q^2 + c_{1,3}Q^3 + \cdots + c_{1,n-1}Q^{n-1} = S, \\ Q^2 + c_{2,3}Q^3 + \cdots + c_{2,n-1}Q^{n-1} = S^2, \\ \cdots \\ Q^{n-2} + c_{n-2,n-1}Q^{n-1} = S^{n-2}, \\ Q^{n-1} = S^{n-1}. \end{cases}$$

其中 $c_{i,j}$ 为(与 Q 无关的)常数. 立即可以解得有 $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$ 使得 $Q = S + \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k S^k$ 满足上式, 而上述方程中的第一式即为 $Q + Q^2 g(Q) = S$. 结论得证.

四、 (本题 20 分) 设 $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个排列, 满足 $|q_n| < n\,(\forall\, n \geqslant 1)$. 又设 $r \in (0,1)$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x - q_n)^{\frac{1}{3}}$. 证明:

(i) g 在 $\mathbb{R}$ 上连续且严格单增. 集合 $E = \big\{g(q)\big|q \in \mathbb{Q}\big\}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to t} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}$, 这里我们规定 $\frac{1}{0} = +\infty$;

(iii) g 的反函数 f 处处可导, 且 f' 在 E 上为零;

(iv) 对任意 $a < b$, 存在不同的 $\xi, \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证明. (i) 由题设,

$$\Big|r^n(x-q_n)\Big| \leqslant (|x|+n)^{\frac{1}{3}} r^n, \qquad \forall\, n \geqslant 1,\, x \in \mathbb{R}.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 内闭一致收敛, 进而 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 又由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (x-q_n)^{\frac{1}{3}}$ 的每一项都严格单增, 因此, g 严格单增.

..... (3 分)

注意到当 $x > 0$ 时,

$$g(x) - g(0) > r\Big((x-q_1)^{\frac{1}{3}} + q_1^{\frac{1}{3}}\Big),$$

我们有 $g(+\infty) = +\infty$. 同理 $g(-\infty) = -\infty$. 由连续函数的介值性, 对任何 $t_0 \in \mathbb{R}$, 有 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $g(x_0) = t_0$. 取 $\mathbb{Q}$ 中点列 $\{x_n\}$ 趋于 x_0, 即得 $t_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) \in \overline{E}$. 因此, $\overline{E} = \mathbb{R}$.

..... (6 分)

(ii) 对于 $x \neq t$, 我们有

$$\frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{(x-q_n)^{\frac{1}{3}} - (t-q_n)^{\frac{1}{3}}}{x-t} r^n, \qquad \forall\, m \geqslant 1.$$

因此,

$$\varliminf_{x \to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \forall\, m \geqslant 1.$$

进而令 $m \to +\infty$ 得到

$$\varliminf_{x \to t^+} \frac{g(x)-g(t)}{x-t} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t-q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

..... (9 分)

另一方面, 易见对任何 $x \neq t$ 成立

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}}{x - t} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}}} \leqslant \frac{4}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

从而 $\forall m \geqslant 1$,

$$\frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{(x - q_n)^{\frac{1}{3}} - (t - q_n)^{\frac{1}{3}}}{x - t} r^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{4}{(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} r^n.$$

因此,

$$\overline{\lim_{x \to t}} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{4r^n}{(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

令 $m \to +\infty$ (无论下式右端是否有限)可得

$$\overline{\lim_{x \to t}} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

最终得到

$$\lim_{x \to t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}.$$

..... (12 分)

(iii) 注意到

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}} \leqslant +\infty.$$

结合 g 的连续性, 可得(这里, 记 $\frac{1}{+\infty} = 0$)

$$\lim_{x \to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{3(t - q_n)^{\frac{2}{3}}}} \in [0, +\infty).$$

因此, f 处处可导且且 f' 在 E 上为零. ..... (14 分)

(iv) 任取 $a < b$. 由中值定理, 有 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = k \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. 易见 $\frac{f(b) - f(\xi)}{b - \xi} \geqslant k$ 或 $\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \geqslant k$.

不失一般性, 设后者成立, 则有 $\zeta_1 \in (a, \xi)$ 使得 $f'(\zeta_1) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} \geqslant k$.

而由 E 的稠密性, 有 $\zeta_2 \in (a, \zeta_1) \cap E$, 此时 $f'(\zeta_2) = 0$. 于是, 由微分 Darboux 定理得到存在 $\eta \in (\zeta_2, \zeta_1] \subset (a, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = k$.

..... (20 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

五、 (本题 10 分) 设 A 为复数域上的 4 阶幂等阵 (即 $A^2 = A$). 证明: 存在复数 c_0, c_1, c_2, c_3 使得 A 相似于 $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$.

证明. (1) 首先, 由 A 幂等可知 $\mathbb{C}^4 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$, 进而 $\operatorname{Ker} A$ 的一组基并上 $\operatorname{Im} A$ 的一组基便构成$\mathbb{C}^4$ 的一组基. 显然 $\operatorname{Ker} A$ 的基为 A 关于特征值 0 的特征向量, $\operatorname{Im} A$ 的基为 A 关于特征值 1 的特征向量, 故 A 拥有 4 个线性无关的特征向量, A 相似于对角阵 $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_4)$.

..... (5 分)

其次, 记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^4 = I_4.$$

显见, B 的特征多项式为 $|\lambda I - B| = \lambda^4 - 1$, B 有 4 个不同的特征值: $\xi_1, \ldots, \xi_4$. 从而 $B \sim \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \xi_4 \end{pmatrix}$.

考察下列关于 a_0, a_1, a_2, a_3 的方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_1^2 + a_3\xi_1^3 = \lambda_1 \\ a_0 + a_1\xi_2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_2^3 = \lambda_2 \\ a_0 + a_1\xi_3 + a_2\xi_3^2 + a_3\xi_3^3 = \lambda_3 \\ a_0 + a_1\xi_4 + a_2\xi_4^2 + a_3\xi_4^3 = \lambda_4, \end{cases}$$

其系数行列式为范得蒙行列式, 它 $\neq 0$. 故有唯一解: $c_0, \ldots, c_3$. 令$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$, 则有 $f(\xi_i) = \lambda_i, i = 1, \ldots, 4$.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

最后, $f(B) \sim \begin{pmatrix} f(\xi_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\xi_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_4 \end{pmatrix} \sim A$. 直接地,

$f(B) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{pmatrix}$. 证毕.

..... (10 分)

六、 (本题 16 分) 设 f 是 $[0,1]$ 上的可积函数, $\alpha>0$ 是常数. 证明: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\,dt$ 存在.

证明. 我们只要证明如下结论:

对任何 $a,b>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt$ 存在蕴含 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt$ 存在.

..... (2 分)

现设 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt=A\in\mathbb{R}$, 记

$$F(x)=\int_0^x t^{a-1}f(t)\,dt,\qquad x\geqslant0,$$
$$\omega(r)=\sup_{x\in(0,r)}\Big|\frac{F(x)}{x^a}-A\Big|,\qquad r>0.$$

则 $\lim\limits_{r\to0^+}\omega(r)=0$.

..... (6 分)

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt=\frac{t^{b-a}F(t)}{x^b}\Big|_0^x-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-a-1}F(t)\,dt\\=&\frac{F(x)}{x^a}-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-a-1}F(t)\,dt\\=&\frac{1}{x^a}F(x)-\frac{(b-a)A}{b}-\frac{b-a}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\Big(\frac{F(t)}{t^a}-A\Big)\,dt,\qquad x>0,\end{aligned}$$

..... (11 分)

而

$$\Big|\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\Big(\frac{F(t)}{t^a}-A\Big)\,dt\Big|\leqslant\frac{\omega(x)}{x^b}\int_0^x t^{b-1}\,dt=\frac{\omega(x)}{b},\qquad x>0.$$

由此立即得到 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^b}\int_0^x t^{b-1}f(t)\,dt=A$.

..... (16 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____
密封线 答题时不要超过此线

七、(本题 10 分) 求在 $\mathbb{R}$ 上处处可微且满足 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4 - y^2$ 的所有实函数 $y = y(x)$.

证明. 形式求解 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$, 易见在任何区间 $(a,b) \subseteq (-\infty, +\infty)$ 和任何常数 $C \in \mathbb{R}$, $y = \pm 2$ 以及 $y = 2\sin(x+C)$ 均满足 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$.

.....(1 分)

另一方面, 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 若 $|y(x_0)| = 2$, 则 $y'(x_0) = 0$.

若 $|y(x_0)| < 2$, 则由连续性, 有 $\delta > 0$ 使得在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $|y(x)| < 2$. 进而在此区间内 $y'(x) \neq 0$. 由微分 Darboux 定理, 可得 $y'(x)$ 在此区间内恒正或恒负. 进一步, 设 $(\alpha, \beta) \ni x_0$ 是使得 $y'(x)$ 恒正或恒负的最大区间(目前, 不排除 α, β 有可能是 $-\infty, +\infty$).

.....(3 分)

若 $y'(x_0) > 0$, 则

$$y'(x) = \sqrt{4-y^2}, \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

解得

$$\arcsin\frac{y}{2} = x - x_0 + \arcsin\frac{y(x_0)}{2}, \qquad x \in (\alpha, \beta).$$

从而

$$y = 2\sin(x + C), \qquad x \in (\alpha, \beta),$$

其中 $C = \arcsin\frac{y(x_0)}{2} - x_0$. 由此可见 $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. 此时由 (α, β) 的最大性, 必然有 $|y(\alpha)| = |y(\beta)| = 2$, 即 $y'(\alpha) = y'(\beta) = 0$. 结合 y' 在 (α, β) 内恒正得到 $\beta - \alpha = \pi$. 此时可以重写 y 的表达式为

$$y(x) = -2\cos(x - \alpha), \qquad x \in (\alpha, \alpha + \pi).$$

类似地, 若 $y'(x_0) < 0$, 则成立 $\beta = \alpha + \pi$,

$$y(x) = 2\cos(x - \alpha), \qquad x \in (\alpha, \alpha + \pi).$$

易见, y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现的.

.....(6 分)

一般地, 可得开集 $\{x \in \mathbb{R} \big| |y(x)| < 2\}$ 是一列两两不交的长度为 π 的区间的并, 其中 y 的严格单增区间和严格单减区间是交替出现.

为清晰起见, 我们按如下方式写出 y 所有可能的表达式.

情形 1: y 没有严格单调区间. 此时, $y \equiv 2$ 和 $y \equiv -2$.

情形 2: y 至少有一个严格单调区间.

此时, 有 $\varepsilon = \pm 1$, $-\infty \leqslant \ell \leqslant m \leqslant +\infty$ 以及相应的 $\{a_k\}_\ell^m$ 满足 $a_{k+1} - a_k \geqslant \pi\,(\ell \leqslant k \leqslant m-1)$, 使得

$$y(x) = 2\varepsilon \begin{cases} (-1)^{k+1}\cos(x-a_k), & x \in (a_k, a_k+\pi), \ell \leqslant k \leqslant m, \\ (-1)^k, & a_k + \pi \leqslant x \leqslant a_{k+1}, \ell \leqslant k \leqslant m-1, \\ (-1)^{\ell+1}, & x \leqslant a_\ell, \\ (-1)^m, & x \geqslant a_m + \pi, \end{cases}$$

其中, 上式中, 后两种情形分别对应在 $\ell > -\infty$ 和 $m < +\infty$ 时出现.

另一方面, 上述给出的函数满足题设条件. 因此, 我们找到了满足题设条件的所有函数.

..... (10 分)