第十一届广东省大学生数学竞赛试卷（高职高专类）
参考答案

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

1. $\left[-\frac{2}{3},3\right]$.

2. -1.

3. $\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$.

4. $\sin 1-\cos 1$.

5. $\frac{1}{18}\left(1-2\sqrt{2}\right)$.

二、（10 分）解： $V=\pi\int_{-4}^{4}\left(5+\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-4}^{4}\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

$=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$，……6 分

令 $x=4\sin t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $V=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=640\pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=160\pi^2$. ……4 分

三、（10 分）解： 由题意得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2},$$

由 $\lim_{x\to 0}3kx^2=0$，得 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=1+a=0$，

故 $a=-1$. ……4 分

于是

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}.$$

由 $\lim_{x\to 0}6kx=0$，得 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x\right]=1+2b=0$，

得 $b=-\frac{1}{2}$. ……3 分

进一步，得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\frac{1}{2}x\sin x}{6kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x}{6k}=-\frac{1}{3k},$$

则 $k=-\frac{1}{3}$. ……3 分

四、（10 分）解： $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \overset{令t=\arccos x}{=\!=\!=\!=\!=} \int \frac{t\cos^3 t}{\sin t}\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t$

$$= -\int t\cos^3 t\mathrm{d}t = -\int t\cos^2 t\mathrm{d}\sin t = -\int t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t$$

$$= -\int t\mathrm{d}\sin t + \int t\sin^2 t\mathrm{d}\sin t = -t\sin t + \int \sin t\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int t\mathrm{d}\sin^3 t$$

$$= -t\sin t - \cos t + \frac{1}{3}t\sin^3 t - \frac{1}{3}\int \sin^3 t\mathrm{d}t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}$$

$$= -t\sin t - \cos t + \frac{1}{3}t\sin^3 t + \frac{1}{3}\int (1-\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t$$

$$= -t\sin t - \cos t + \frac{1}{3}t\sin^3 t + \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{9}\cos^3 t + C$$

$$= -t\sin t - \frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}t\sin^3 t - \frac{1}{9}\cos^3 t + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\arccos x - \frac{1}{9}x^3 + C \cdots\cdots 4\text{分}$$

.

五．**（15 分）证明：**做辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$，……5 分

对 $F(x)$ 分别在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上应用拉格朗日中值定理.

$$\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)，使 \frac{F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)}{\frac{1}{2}-0} = F'(\xi) = f'(\xi) - \xi^2，$$

$$\exists \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)，使 \frac{F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = F'(\eta) = f'(\eta) - \eta^2，$$

两式相加即得 $f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2 = 0$，即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.……10 分

六、（15 分）解：设 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$，$x \in (0,1)$，则

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}，\ \cdots\cdots 5\text{分}$$

令 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$，则 $g(0) = 0$．$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$，

$g'(0)=0$， $g''(x)=\dfrac{2\left[\ln(1+x)-x\right]}{1+x}<0$， $x\in(0,1)$，所以$g'(x)$在$(0,1)$上单调减少. 由于$g'(0)=0$, 所以当$x\in(0,1)$时， $g'(x)<g'(0)=0$, 也就是$g(x)$在$(0,1)$上单调减少. 当$x\in(0,1)$时, $g(x)<g(0)=0$，进一步得到当$x\in(0,1)$时， $f'(x)<0$, 也就是$f(x)$在$(0,1)$上单调减少. ……7 分

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\text{，}\quad f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1\text{，}$$

于是得到$\dfrac{1}{\ln 2}-1<k<\dfrac{1}{2}$.……3分

七、（15 分）解：若 $\boldsymbol{f(x)\equiv a}$, 则显然有 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a}$.……**2分**

若 $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a}$. 如果 $\boldsymbol{f(x)\not\equiv a}$, 那么存在 $\boldsymbol{x_0\in(0,+\infty)}$ 使得 $\boldsymbol{f(x_0)\neq a}$,

于是 $\boldsymbol{x_0}$ 满足 $\boldsymbol{f(x_0)=f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)=f\left(\dfrac{x_0}{2^2}\right)=\cdots=f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=\cdots}$，从而得到数列 $\boldsymbol{\left\{\dfrac{x_0}{2^n}\right\}}$，并且

$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=\lim\limits_{\frac{x_0}{2^n}\to0^+}f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=a}$， ……10 分

另一方面 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_0\right)\neq a}$，矛盾，所以 $\boldsymbol{f(x)\equiv a}$.……**3分**