姓名：_____ 身份证号：_____ 学校：_____ 考场：_____ 座号：_____

密 —— 封 —— 线

第十一届广东省大学生数学竞赛试卷

（高职高专类，2021年）

考试形式：闭卷　考试时间：150分钟　满分：100分

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

1. 函数 $f(x)=4\sqrt{3x+2}+2\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为_____.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$_____.

3. 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$_____.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{2}}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$_____.

5. 已知函数 $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{1+t^{4}}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_{0}^{1}x^{2}f(x)\mathrm{d}x=$_____.

二、（10 分）求圆 $x^{2}+(y-5)^{2}=16$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

三、（10 分）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时为等价无穷小量，求 a, b, k 的值.

四、（10 分）计算不定积分 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

五、（15 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在（0,1）内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=\frac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$， $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

六、（15 分）已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围.

七、（15 分）若$\forall x \in (0,+\infty)$， $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$，证明$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=a$当且仅当在$(0,+\infty)$内$f(x)\equiv a$.