第十一届广东省大学生数学竞赛试题参考答案（经济管理类）

(2021.11.13 上午 9:00-11:30)

一．填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1．e^2．　　2．$2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$．

3．$\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$．　　4．$2021!$．

5．1440．　　6．$\alpha>\frac{1}{3}$．

7．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$，$-1<x<1$．　　8．$\frac{4\ln 2}{4-\sqrt{2}\pi}$．

二．（10 分）解法一：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}}=\dfrac{\int_0^1\sqrt{x}dx}{\int_0^1\sqrt{1+x}dx}=\dfrac{\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1}{\left.\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$．

解法二（利用 Stolz 公式）$x_n=1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$，$y_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}$，

则 y_n 单调递增，且 $y_n\to+\infty,n\to\infty$，满足 Stolz 公式条件，

则原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+2}-\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$．

三．（10 分）解：（1）令 $F(a)=\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$，由题意知 $F'(a)=f(ab)b-f(a)=0$，

即 $f(ab)b=f(a)$，取 $a=1$，又 $f(1)=1$，所以 $f(b)b=1(b>0)$，

即 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$．

（2）$\int f(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}+1)=-\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)+C$$

法二：$\int f(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x$

$=\int(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1})\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\ln\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$．

四．（10 分）解：记 $a_n=\dfrac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\dfrac{n+2}{n![1+n+1+(n+1)(n+2)]}$

$$=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]=\frac{1}{2}.$

五.（10 分）解：$\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx=\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx+\int_{y}^{1}(x-y)e^x dx$，

$$\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx=e^y-\frac{y+2}{e},\ \int_{y}^{1}(x-y)e^x dx=e^y-ey,$$

故 $\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx=\int_{-1}^{y}(y-x)e^x dx+\int_{y}^{1}(x-y)e^x dx=2e^y-\frac{y+2}{e}-ey$.

六.（9 分）证：（1）对于 $x>0$，有 $e^x-1>x$，又 $x_1>0,$ 得 $e^{x_2}=\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$ ，从而 $x_2>0,$ 归纳知 $x_n>0$，从而数列 $\{x_n\}$ 有下界.

（2）令 $f(x)=xe^x-e^x+1$ ，当 $x>0$ 时，$f'(x)=xe^x>0$，从而 $f(x)>f(0)=0$，

即 $xe^x>e^x-1$ ，从而 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0$，即单调递减.

证法二：利用拉格朗日中值定理知，存在 $0<\xi_n<x_n$，使得

$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi_n}<e^{x_n}$，从而 $x_{n+1}<x_n$. 由单调有界原理知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

（3）令 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$，则 $le^l=e^l-1$，解得 $l=0$.

七.（9 分）解 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}dx\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\int_{1}^{0}\frac{t}{\sqrt{1+\frac{1}{t^5}+\frac{1}{t^{10}}}}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt$

$$=\int_{0}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{1+t^5+t^{10}}}dt=\frac{1}{5}\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+u+u^2}}du$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

八.（9 分）解：由 $Q=\frac{4-P}{\gamma}$ 得 $P=4-\gamma Q$，因而总收入函数 $R(Q)=PQ=Q(4-\gamma Q)$，

且总利润

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=Q(4-\gamma Q)-(\alpha Q^2-2Q-\beta)=-(\alpha+\gamma)Q^2+6Q+\beta\ ,$$

因 $-(\alpha+\gamma)<0$ 时，有 $L(Q)$ 最大值，由 $L'(Q)=-2(\alpha+\gamma)Q+6$，解得唯一驻点 $Q=\dfrac{3}{\alpha+\gamma}$，

且由 $L''(Q)=-2(\alpha+\gamma)<0$，知 $Q=\dfrac{3}{\alpha+\gamma}$ 是 $L(Q)$ 的极大值点，因而当产量 $Q=\dfrac{3}{\alpha+\gamma}$ 时，

总利润 $L(Q)$ 取得最大值 $\dfrac{9}{\alpha+\gamma}+\beta$.

九．解：在方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边对 x 求导得

$$3y^2y'-2yy'+y+xy'-x=0\ ,\ ①$$

令 $y'=0$，得 $y=x$，代入原方程有 $2x^3-x^2-1=0$，从而得驻点 $x=1$，在①式两边再对 x 求导得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0\ ,$$

因此，$y''\big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$，故驻点是它的极小值点.