座号：_____ 考场：_____ 学校：_____ 身份证号：_____ 姓名：_____

密 封 线

第十一届广东省大学生数学竞赛试卷

（经管类，2021年）

考试形式：闭卷　考试时间：150分钟　满分：100分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一．填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

2．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x=$_____.

3．设 $y(x-y)^2=x$，则 $\int \frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x=$_____.

4．设$f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x-2019)(x+2020)(x-2021)$，则 $f'(1)=$____.

5．设 $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$，则 $f^{(6)}(0)=$_____.

6．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ 收敛，则常数α 的取值范围为_____.

7．函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成的 x 幂级数为_____.

8．设 $f(x)=\frac{\ln x}{(1+x)^2}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$____.

二.（10 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+n}}.$$

三.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$f(1)=1$，若对任意的正数 a,b，积分 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关，求不定积分 $\int f(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$.

四.（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ 的和.

五.（10 分）设$|y|<1$，求$\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

六.（9 分）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1 > 0$，$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1(n = 1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

七.（9 分）计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}\mathrm{d}x$.

八.（9 分）设某产品的成本函数为$C(Q)=\alpha Q^2-2Q-\beta$，需求函数为$Q=\dfrac{4-P}{\gamma}$，其中C为成本，Q为产量，P为该产品的单价，α,β,γ都是正常数，求利润最大时的产量.

九.（9 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判定它是否为极值点.