姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线　答题时不要超过此线

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷
(非数学 **B** 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 请勿超出答题区域作答.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3}{x+2})^{2x-1}=$ _____.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数,

则 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=$ _____.

(3) 设曲线 $y=\ln(1+ax)+1$ 与曲线 $y=2xy^3+b$ 在 $(0,1)$ 处相切,

则 $a+b=$ _____.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+\arctan(xy)$ 所决定, 则 $y'(0)=$ _____.

(5) 计算 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=$ _____.

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 设曲线 $y = 3ax^2 + 2bx + \ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，且当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $y \geqslant 0$. 设该曲线与直线 $x = 1, x$ 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1. 试求常数 a, b, c 的值，使得 D 绕 x 轴一周后，所得旋转体的体积最小.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$

得分	
评阅人	

四、 (本题 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f(0)>0$, $f(1)>0$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明：

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有两个零点；

(2) 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.