姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

# 第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷
## (数学 B 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

**注意:**

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 请勿超出答题区域作答.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、 (本题 15 分) 在空间中给定两不同点 $P$ 和 $Q$. 过 $P$ 点直线 $L(P)$ 和过 $Q$ 点直线 $L(Q)$ 正交于点 $M$. 问：所有可能的正交点 $M$ 构成何种曲面？证明你的结论.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、 (本题 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+(y^2+z^2)(1-x)^3$.

(1) 计算 $f$ 的驻点.

(2) 求 $f$ 在 $\Sigma$ 上的最小值, 其中,

$\Sigma$ 是 $\left\{(x,y,z)\middle||x|\leqslant 2,\ y^2+z^2\leqslant 4\right\}$ 的边界.

(3) 求 $f$ 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\leqslant 1$ 上的最小值.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、 (本题 20 分) 设 $V$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 $V$ 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 $V$ 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 $\lambda$, $\lambda$ 的几何重数为 1.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、 (本题 15 分) 证明对任意 $n$ 阶方阵 $A$, 存在主对角线上元素为 $1$ 或 $-1$ 的 $n$ 阶对角矩阵 $J$ 使得 $A+J$ 可逆.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、 (本题 15 分) 设 $f(x) = x^n(1-x)^n$,
$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$.
计算并化简 $\frac{d}{dx}\big(F'(x)\sin x - F(x)\cos x\big)$.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、 (本题 20 分) 设非负函数 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 且存在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数 $g$, 使得

$$f'(x) \le g(x), \qquad x \ge 0.$$

分别就下列三种情形, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(i) $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛.

(ii) $g(x) = C > 0$, 其中 $C$ 为常数.

(iii) $g(x) = Cf^p(x)$, 其中 $C > 0, p > 0$ 为常数.