姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 密封线 答题时不要超过此线 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷
(数学 A 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 请勿超出答题区域作答.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 在空间中给定直线 L 及直线外定点 P. 设 M 是过 P 点且与直线 L 相切的球面的球心. 问：所有可能的球心 M 构成何种曲面？证明你的结论.

得分	
评阅人	

二、 (本题 15 分) 设 $f(x,y,z)=x^2+(y^2+z^2)(1-x)^3$.

(1) 计算 f 的驻点.

(2) 求 f 在 Σ 上的最小值, 其中,

Σ 是 $\left\{(x,y,z)\middle||x|\leqslant 2,\ y^2+z^2\leqslant 4\right\}$ 的边界.

(3) 求 f 在椭球 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\leqslant 1$ 上的最小值.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、 (本题 20 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换. 证明: 存在 $\alpha \in V$ 使得 $\{\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\alpha\}$ 成为 V 的一组基当且仅当对于 $\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ, λ 的几何重数为 1.

得分	
评阅人	

四、 (本题 15 分) 设 $n \geqslant 3$ 为自然数, $\theta = \frac{2\pi}{n}$. 对任意 $1 \leq s, t \leq n$, 取 $a_{st} = \sin(s+t)\theta$, 令矩阵 $A = (a_{st})_{n\times n}$, 计算 $E + A^{2023}$ 的行列式, 其中 E 为 n 阶单位矩阵.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 非空有界, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}$ 非零. 用 $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in E} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 表示 E 的直径, 记 $E+\mathbf{c} = \big\{\mathbf{x}+\mathbf{c}\big|\mathbf{x}\in E\big\}$. 证明: $\operatorname{diam} E < \operatorname{diam}\big(E\cup(E+\mathbf{c})\big)$.

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $a = \sqrt[3]{3}$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 证明: 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在，但不是 3.